ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហា

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ការអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀនតាម បែបរិះរក និងវិធីសាស្ត្របង្រៀន តាមបែប 5Es

(IBL & 5 Es)

លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា

ប្រើប្រាស់ថវិកាគម្រោងអភិវឌ្ឍន៍វិស័យអប់រំ មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (USESDP)

ឆ្នាំ២០២០

មុខកថា

ទស្សនវិស័យអប់រំនាសតវត្សទី២១ បាននាំមកនូវវឌ្ឍនភាពទាំងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថល ដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងការអភិវឌ្ឍសង្គម និងសេដ្ឋកិច្ច។ ឆ្លើយតបទៅនឹងទស្សនៈខាងលើនេះ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានយកចិត្តទុកដាក់លើការបណ្តុះបណ្តាល និងការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្សប្រកបដោយចីរភាព ដោយដាក់ចេញនូវគោលដៅជាអាទិភាព សម្រាប់ការធ្វើកំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ ឈរលើសសរស្តម្ភចំនួន៥ រួមមាន៖ (១)ការអនុវត្តគោលនយោបាយគ្រូបង្រៀន (២)ការវាយតម្លៃ (៣)ការងារអធិការកិច្ច (៤)កម្មវិធីសិក្សា និងបរិស្ថានសិក្សា និង(៥)ឧត្តមសិក្សា។ ការធ្វើកំណែទម្រង់គ្រូបង្រៀន និងកម្មវិធីសិក្សា គឺដើម្បីធានាឱ្យកម្ពុជាមានការអប់រំប្រកបដោយគុណភាព មានធនធានមនុស្សប្រកបដោយសមត្ថភាពវិជ្ជាជីវៈ និងដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងតម្រូវការទីផ្សារពលកម្ម។

ទ្រឹស្តីនៃការរៀននិងបង្រៀន វិធីសាស្ត្របង្រៀន វិធីបង្រៀន និងយុទ្ធវិធីបង្រៀនល្អៗ សម្រាប់លើកកម្ពស់ឧត្តមភាពគ្រូបង្រៀន និងគុណភាពនៃការសិក្សា ត្រូវបានរៀបចំឡើងទៅតាមទស្សនៈ និងចក្ខុវិស័យថ្មីៗ ដោយបានធ្វើការសំយោគចំណេះដឹងពីទ្រឹស្តីអប់រំបែបស្ថាបនានិយម កម្រិតគិតរបស់ប្លូមតាក់សូណូមី និងវិធីសាស្ត្របង្រៀនបច្ចុប្បន្នរបស់ប្រទេសមួយចំនួនក្នុងតំបន់ និងសាកលលោក ដើម្បីឱ្យសិស្សានុសិស្សទទួលបានវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា និងកាយសម្បទា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា សង្ឃឹមថាគ្រប់ស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ នឹងចូលរួមគាំទ្រអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀនទាំងអស់នេះ ដើម្បីពង្រឹងសក្តានុពលរបស់គ្រូបង្រៀនគ្រប់កម្រិតសិក្សា និងអភិវឌ្ឍជំនាញវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀនឱ្យកាន់តែបានល្អប្រសើរឡើង។

ក្រសួង សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងកោតសរសើរចំពោះគណៈកម្មការអភិវឌ្ឍវិធីសាស្ត្របង្រៀន គ្រូឧទ្ទេស និងលោកគ្រូ-អ្នកគ្រូ ដែលបានខិតខំប្រឹងប្រែងយកអស់កម្លាំងកាយចិត្ត និងប្រាជ្ញា ធ្វើឱ្យស្នាដៃដ៏មានសារៈសំខាន់នេះសម្រេចបាន ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់សង្គមជាតិយើង។

ថ្ងៃ [illegible] ខែ [illegible] ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស. ២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ១៤ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ២០២០

រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន**

អារម្ភកថា

សកលភាវូបនីយកម្មលើវិស័យសេដ្ឋកិច្ច បច្ចេកវិទ្យានយោបាយ និងវិទ្យាសាស្ត្រ បានធ្វើឲ្យពិភពលោកកាន់តែមានការប្រកួតប្រជែងគ្នា ហើយពេលខ្លះក៏សហការគ្នា ដើម្បីឈានទៅសម្រេចគោលដៅអភិវឌ្ឍសហស្សវត្សរ៍និងអភិវឌ្ឍប្រកបដោយចីរភាព។ ស្របតាមកំណែទម្រង់ស៊ីជម្រៅក្នុងវិស័យអប់រំជាមួយការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្សប្រកប ដោយវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា និងកាយសម្បទា ជាកត្តាកំណត់ភាពជោគជ័យនៃការអភិវឌ្ឍលើចំណេះដឹងរបស់សិស្សឲ្យមានការរីកចំរើនជាលំដាប់។ ដោយយោងលើបញ្ហានេះ ទើបក្រុមគ្រូឧទ្ទេសមុខវិទ្យាគណិតវិទ្យាដែលជាគ្រូបង្គោលថ្នាក់ជាតិនិងលោកគ្រូ អ្នកគ្រូនៃសាលាជំនាន់ថ្មីបានសម្រេចលើកយកខ្លឹមសារ **"វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងរៀនគណិតវិទ្យាតាមបែបរិះរក និងតាមលំនាំគំរូ5Es"** ទៅក្នុងកម្មវិធីវិក្រឹតការគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ជាតិ ដើម្បីធ្វើឲ្យសិក្ខាកាមអាចបញ្ជ្រាបខ្លឹមសារវិធីសាស្ត្របង្រៀនទាំងនេះដល់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាតាមសាលាវិទ្យាល័យនានានៅទូទាំងរាជធានីខេត្តនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ការប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងរៀនគណិតវិទ្យា**តាមបែបរិះរកនិងតាមលំនាំគំរូ5Es** ជាចំណែកមួយក្នុងការពង្រឹង និងពង្រីកចំណេះដឹងរបស់សិស្សនិងធ្វើឲ្យគុណភាពនៃការរៀននិងបង្រៀនកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពខ្ពស់បន្ថែមមួយកម្រិតទៀត។ ការរិះរកមានន័យថា ការរកចំណេះដឹងតាមរយៈសំណួរ ឬ ចម្ងល់។ ការប្រើប្រាស់វិធីបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក មានចំណុចសំខាន់បីយ៉ាងគឺ៖ (១)សំណួរគន្លឹះ (២)វិធីស្រាវជ្រាវឬស្វែងរកចម្លើយ (៣)ការសន្និដ្ឋាន។ ការប្រើគំរូបង្រៀននិងរៀនតាម5Es ផ្តោតលើទិដ្ឋភាពនៃសកម្មភាពចំនួន៥គឺ៖ (១)ចូលរួម-Engage (២)រុករក-Explore (៣)ពន្យល់-Explain(៤)បញ្ជាក់លម្អិត-Elaborate (៥)វាយតម្លៃ-Evaluate។ ការប្រើប្រាស់វិធីបង្រៀន និងរៀនខាងលើ ធ្វើឱ្យសិស្សមានភាពក្លាហាន និងមានចំណាប់អារម្មណ៍ ក្នុងការរៀនសូត្រគណិតវិទ្យា ពោលគឺធ្វើឱ្យសិស្សចេះសង្កេត ចេះឆ្ងល់ និងចេះស្វែងរកមធ្យោបាយទៅរកចម្លើយតាមរយៈការពិភាក្សាគ្នា ឬពិសោធន៍ ចេះបកស្រាយ និងវាយតម្លៃតាមហេតុផលសមស្រប។ចំណុចសំខាន់ៗទាំងនេះជាចលករក្នុងការជំរុញសិស្សក្នុងការរៀនសូត្រគណិតវិទ្យាដើម្បីទទួលបានចំណេះដឹងមួយពេញលេញ និងមានគុណភាព។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សិក្ខាកាមទាំងអស់ដែលជាគ្រូគណិតវិទ្យាដែលកំពុងបង្រៀននៅកម្រិតអនុវិទ្យាល័យឡើងទៅ និងព្យាយាមស្តាប់ការពន្យល់របស់គ្រូឧទ្ទេសដោយយកចិត្តទុកដាក់និងសិក្សាស្វែងយល់អត្ថន័យដោយខ្លួនឯងពីការបង្រៀនគណិតវិទ្យា**តាមបែបរិះរក និងតាមលំនាំគំរូ5Es** នេះ ដើម្បីក្រេបជញ្ជក់យកខ្លឹមសារ និងគំរូនៃការបង្រៀនថ្មីៗទុកជាទុនក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនកម្រិតគណិតវិទ្យានៅតាមវិទ្យាល័យបន្ត និងអនុវត្តវិធីសាស្ត្រខាងលើក្នុងការបង្រៀនដើម្បីឱ្យសិស្សកាន់តែចាប់អារម្មណ៍ក្នុងការរៀនសូត្រលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា ក៏ដូចជាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រដ៏ទៃទៀត និងធ្វើឱ្យការរៀនសូត្រមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្ររបស់ពួកគេ កាន់តែពូកែឡើង។

យើងខ្ញុំដែលជាគ្រូឧទ្ទេសគណិតវិទ្យាទាំងអស់ មានភាពរីករាយ និងទទួលយកនូវការរិះគន់ទាំងឡាយដើម្បីកែលម្អ ពីសំណាក់លោកគ្រូអ្នកគ្រូ ជាពិសេសសិក្ខាកាម ចំពោះចំណុចខ្វះខាត និងកំហុសឆ្គងក្នុងការរៀបចំឯកសារ នេះឡើងដោយអចេតនារបស់ក្រុមយើងខ្ញុំ។

ថ្ងៃ ចន្ទ ៥រោច ខែអស្សុជ ឆ្នាំជូត ទោស័កព.ស២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី៧ ខែតុលាឆ្នាំ២០២០

១.គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១.ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន** រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

២.ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ណាត ប៊ុនរឿន** រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

៣.ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សៀង សុវណ្ណា** នាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៤.លោក **ឌី បុណ្ណា** នាយករងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រងសៀវភៅ

១-គ្រូឧទ្ទេស **គណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ** វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២-គ្រូបង្រៀន **គណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ** សាលាជំនាន់ថ្មី

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

១-លោក **ម៉ៅ សារឿន** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២-លោក **ចេង ថុន** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៣ -លោក **គឹម លាង** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

មាតិកា

បុព្វកថា.........i
អារម្ភកថា.........ii
មេរៀនទី ១ ៖ វិធីសាស្រ្តបង្រៀនតាមបែបរិះរក.........1
១.១. ទិដ្ឋភាពទូទៅនៃការបង្រៀននិងរៀនតាមបែបរិះរក.........1
១.១.១. ទិដ្ឋភាពទូទៅនៃការបង្រៀននិងរៀនគណិតវិទ្យាក្នុងថ្នាក់រៀន.........1
១.១.២. មូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងការណែនាំពីវិធីសាស្រ្តបង្រៀនគណិតវិទ្យា.........1
១.១.៣. តើអ្វីជាការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក?.........2
១.២. ប្លង់នៃការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក.........3
១.៣. ពីបាតុភូតវិទ្យាសាស្រ្ត ឬព្រឹត្តិការណ៍សង្គមទៅជាការរិះរក.........5
១.៣.១. សំណួរគន្លឹះ និងការបង្ហាញពីបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍.........5
១.៣.២. ឧទាហរណ៍ពី "ការបង្ហាញបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍" ឆ្ពោះទៅ "សំណួរគន្លឹះ".........5
១.៣.៣. របៀបបង្កើតសំណួរគន្លឹះ.........5
១.៤. វង្វាយតម្លៃការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក.........6
១.៤.១. តើគោលបំណងរបស់យើងគឺជាអ្វី?.........6
១.៤.២. កម្រិតនៃការរិះរក.........6
១.៥.របៀបអភិវឌ្ឍការបង្រៀន និងរៀន.........8
១.៥.១.ប្រការយល់ដឹងមុនពេលធ្វើកិច្ចតែងការបង្រៀន.........8
១.៥.២.ដំណើរការអភិវឌ្ឍកិច្ចតែងការបង្រៀនតាមបែបរិះរក.........8
១.៥.៣.ការកំណត់ពីបាតុភូតផ្សេងៗដែលត្រូវបង្ហាញ.........9
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី១.........9
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២.........15
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣.........19
មេរៀនទី ២ ៖ គំរូការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es.........24
២.១. សាវតារ.........24
២.២. ដំណាក់កាលនៃគំរូបង្រៀន និងរៀនតាម **5Es**.........26
២.៣. សកម្មភាពគ្រូ និងសិស្សក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាម **5Es**.........29
២.៤. ការសរសេរកិច្ចតែងការបង្រៀនគណិតវិទ្យាផ្អែកលើគំរូ 5E.........32
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី១.........34
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២.........38
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ.........42
គំរូមេរៀនទី១ ៖ ប្រូបាប៊ីលីតេ.........47

លំហាត់បន្ថែម 77
គំរូមេរៀនទី២ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 78

មេរៀនទី ១ ៖ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបរិះរក

១.១. ទិដ្ឋភាពទូទៅនៃការបង្រៀននិងរៀនតាមបែបរិះរក

១.១.១. ទិដ្ឋភាពទូទៅនៃការបង្រៀននិងរៀនគណិតវិទ្យាក្នុងថ្នាក់រៀន

ជាដំបូងយើងពិនិត្យមើលការបង្រៀននិងរៀនគណិតវិទ្យាក្នុងថ្នាក់រៀនវិទ្យាសាស្ត្រពិត និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ដែលកំពុងអនុវត្តក្នុងសាលារៀននៅតាមតំបន់មួយចំនួននៅលើពិភពលោក។ ចូរស្រមៃគិតពីទិដ្ឋភាពថ្នាក់រៀនដូចខាងក្រោម៖

- **ទិដ្ឋភាពទី ១**

  គ្រូប្រាប់សិស្សអំពីទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ថាអ៊ីប៉ូតេនុសការេស្មើផលបូកការេនៃជ្រុងមុំកែង រួចគ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សអនុវត្តលើទ្រឹស្តីបទនេះ។

- **ទិដ្ឋភាពទី ២**

  គ្រូមានរូបត្រីកោណកែងមួយ ហើយឱ្យសិស្សវាស់ប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់វា រួចលើកប្រវែងជ្រុងទាំងនោះជាការេ។ បន្ទាប់មកគ្រូឱ្យសិស្សប្រៀបធៀបការេនៃអ៊ីប៉ូតេនុស និងផលបូកការេនៃជ្រុងមុំកែង រួចធ្វើការសន្និដ្ឋាន ហើយទាញចេញជាទ្រឹស្តីបទ។

- **ទិដ្ឋភាពទី ៣**

  គ្រូប្រាប់សិស្សអំពីទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រថាអ៊ីប៉ូតេនុសការេ ស្មើផលបូកការេនៃជ្រុងមុំកែង រួចគ្រូធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ចំពោះទ្រឹស្តីបទនេះឱ្យសិស្សបានជឿជាក់ច្បាស់ និងបាត់ឆ្ងល់ថា តើទ្រឹស្តីបទនេះបានមកពីណា?

- **ទិដ្ឋភាពទី ៤**

  គ្រូប្រាប់សិស្សឱ្យអានសៀវភៅសិក្សាគោលអំពីទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងម៉ោងសិក្សា រួចឱ្យសិស្សឡើងបកស្រាយទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ រួចគ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សអនុវត្តលើទ្រឹស្តីបទនេះ។

  តើអ្នកគិតយ៉ាងដូចម្តេចអំពីវិធីសាស្ត្របង្រៀនទាំងបួនខាងលើនេះ? តើវាស្រដៀងគ្នានឹងវិធីសាស្ត្របង្រៀនរបស់អ្នកដែរឬទេ? ចុះសហការីរបស់អ្នកវិញ បង្រៀនមេរៀនគណិតវិទ្យាតាមរបៀបណា?

១.១.២. មូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងការណែនាំពីវិធីសាស្ត្របង្រៀនគណិតវិទ្យា

ឥឡូវនេះ គ្រូបង្រៀនភាគច្រើននៅលើពិភពលោកបានស្គាល់អំពី "គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល" យ៉ាងហោចណាស់ក៏ស្គាល់ពីឈ្មោះរបស់វាដែរ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ នៅមានការយល់ច្រឡំមួយចំនួននៅក្នុងចំណោមគ្រូបង្រៀនទាំងនោះ។ គ្រូបង្រៀនភាគច្រើនយល់ថា ការបង្រៀនរបស់ពួកគាត់បានអនុវត្តតាមគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលហើយ គ្រូមួយចំនួនបាននិយាយថា "ខ្ញុំឱ្យសិស្សធ្វើការងារជាក្រុមរៀងរាល់ម៉ោងបង្រៀន" ឬ "ខ្ញុំតែងតែ សួរសំណួរជាច្រើនទៅសិស្សរបស់ខ្ញុំ ដើម្បីឱ្យពួកគេមានការគិតច្រើន" ឬ "ខ្ញុំផ្តល់ឱកាសច្រើនដើម្បីធ្វើការអនុវត្ត" ឬ "ខ្ញុំធ្វើការពិសោធជាញឹកញាប់"។ ប៉ុន្តែ តើយើងអាចនិយាយបានថាវិធីបង្រៀនបែបនេះសុទ្ធតែជាវិធីបង្រៀនតាមគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលបានដែរឬទេ?

ដូចលោកគ្រូ អ្នកគ្រូដឹងស្រាប់ហើយថា ចម្លើយពិតណាស់គឺ "ទេ"។ វិធីសាស្ត្រទាំងនោះមិនបានឈានទៅរកការសិក្សាតាមបែបគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល ដែលមានលក្ខណៈពេញលេញនោះទេ។ ជាឧទាហរណ៍ដូចដែលយើងបានឃើញជារឿយៗមកហើយដូចជា៖

- **ចំពោះការធ្វើការជាក្រុម៖** មានសិស្សតែពីរ ឬបីនាក់ប៉ុណ្ណោះដែលបានគិត និងបានចូលរួមធ្វើសកម្មភាព ហើយសិស្សដ៏ទៃទៀតបានតែអង្គុយមើល ដោយមិនបានជួយអ្វីទាំងអស់។ ឬមួយក៏គ្រូដាក់សំណួរឱ្យសិស្សទៅតាមក្រុមនីមួយៗ ហើយមានសិស្សពូកែម្នាក់ ឬពីរនាក់ប៉ុណ្ណោះដែលជាអ្នកឆ្លើយនឹងសំណួរនោះ។
- **ចំពោះការធ្វើពិសោធ៖** គ្រូជាអ្នកធ្វើពិសោធ ក៏ប៉ុន្តែ (១) វាមិនបានផ្តល់ឱ្យសិស្សនូវចំណេះដឹង និងជំនាញថ្មីៗដែលទាក់ទងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រទេ (២) លទ្ធផលដែលទទួលបានវាមិនសម្រេចបានតាមគោលបំណងនៃមេរៀននោះឡើយ (៣) ការសន្និដ្ឋានរបស់សិស្សបានមកពីការរកឃើញនៅក្នុងសៀវភៅពុម្ពដែលមិនមែនបានមកពីលទ្ធផលធ្វើការពិសោធនោះទេ។

ឆ្លើយតបនឹងករណីខាងលើនេះ ដំណើរការនៃការបង្រៀននិងរៀន គឺវាស្ថិតនៅឆ្ងាយពីគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល ឬមានលក្ខណៈមិនពេញលេញ។

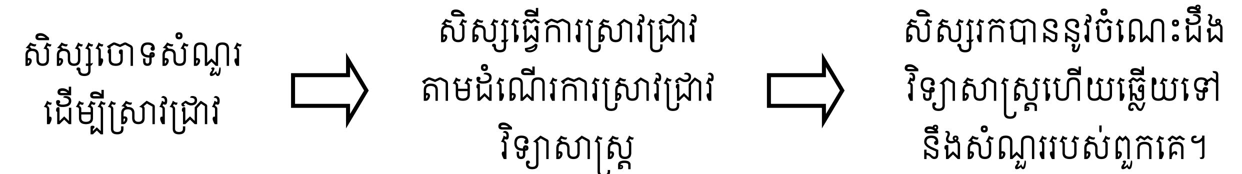
ដូចនេះ តើអ្នកគិតថាមានអ្វីដែលនាំឱ្យមានការសន្និដ្ឋានបែបនេះ? គំនិតភាគច្រើនគិតថា ការអនុវត្តគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល ដែលផ្តោតទៅលើការអប់រំវិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យា ភាសា និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ពុំទាន់ត្រូវបានណែនាំឱ្យបានល្អិតល្អន់ដល់គ្រូបង្រៀនដែលទាក់ទងនឹងគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលនេះ នៅឡើយទេ។

ការរិះរក គឺជាវិធីសាស្ត្របង្រៀនមួយ នៅក្នុងគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល ដែលផ្តោតទៅលើការអប់រំវិទ្យាសាស្ត្រ និង វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ។ ការណែនាំអំពីវិធីសាស្ត្របង្រៀននេះ ផ្តល់ឱ្យគ្រូបង្រៀន បង្រៀនមេរៀន វិទ្យាសាស្ត្រ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមមានទិដ្ឋភាពច្បាស់លាស់មួយ។

១.១.៣. តើអ្វីជាការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក?

ការរិះរក មានន័យថា **ការរកចំណេះដឹងតាមរយៈសំណួរ**។ ដូច្នេះការបង្រៀននិងការរៀនតាមបែបរិះរក គឺជាការបង្រៀនដែលលើកទឹកចិត្តសិស្សឱ្យធ្វើការជាមួយគ្នា ដើម្បីផ្តល់ចម្លើយទៅនឹងចម្ងល់ ឬសំណួររបស់ពួកគាត់ ជាជាងការបង្រៀនដោយផ្ទាល់ពីគ្រូ និងធ្វើអ្វីៗតាមគ្រូ។ ការងាររបស់គ្រូនៅក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក គឺមិនមែនផ្តល់ចំណេះដឹងទៅឱ្យសិស្សនោះទេ ប៉ុន្តែត្រូវជួយសិស្សឱ្យរកបាននូវចំណេះដឹងដោយខ្លួនគេផ្ទាល់។

ការបង្រៀន និងការរៀនតាមបែបរិះរកតម្រូវឱ្យសិស្សសង្កេត និងវិភាគអំពីបាតុភូតវិទ្យាសាស្ត្រដើម្បីបង្កើតសំណួរ ធ្វើពិសោធន៍ឬធ្វើការស្រាវជ្រាវដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងសំណួររបស់ពួកគេ និងទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋានសមស្របមួយ តាមរយៈលទ្ធផលនៃការធ្វើពិសោធ ឬការស្រាវជ្រាវ។ នៅក្នុងដំណើរការនេះសិស្សនឹងយល់ពីខ្លឹមសារមេរៀនបានស៊ីជម្រៅ ព្រមទាំងទទួលបានជំនាញ និងចំណេះដឹងបែបវិទ្យាសាស្ត្រយ៉ាងពិតប្រាកដ។ នៅពេលដែលសិស្សរៀនវិទ្យាសាស្ត្រ ឬវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមនៅក្នុងថ្នាក់តាមបែបរិះរក ពួកគេក្លាយជា **អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រពាក់កណ្តាល**ទៅហើយ ពីព្រោះពួកគេប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រដូចគ្នាទៅនឹងអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រដែលប្រើនៅពេលធ្វើការស្រាវជ្រាវដែរ។ ដំណើរការដែលសិស្សត្រូវធ្វើនៅក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរកគឺបង្ហាញដូចនៅក្នុងរូបទី១ ខាងក្រោម។



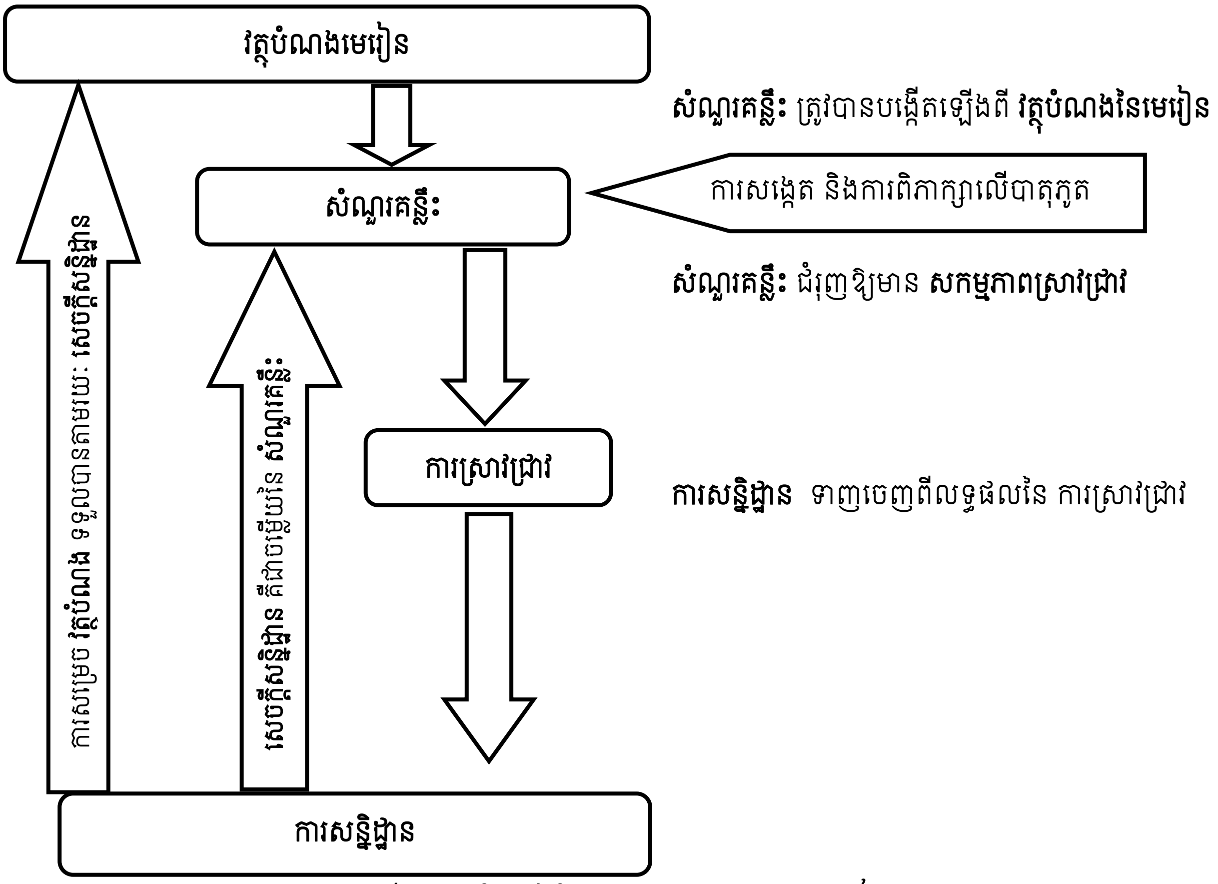
រូបទី១ ៖ ដំណើរការនៃការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក

នៅក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក គ្រូបង្រៀនក៏អាចទទួលបានផងដែរនូវបទពិសោធន៍អំពីការសិក្សាវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមតាមបែបគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល បើទោះបីជាវិធីសាស្ត្រនៃការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរកទាមទារឱ្យគ្រូបង្រៀនត្រូវមានចំណេះដឹងខ្ពស់ខាងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ព្រមទាំងជំនាញឯកទេសក្នុងការបង្រៀនខ្ពស់ជាងវិធីសាស្ត្រធម្មតាក្ដី។

១.២. ប្លង់នៃការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក

សមាសភាគក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក

ដូចជាការបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់ធម្មតាដែរ ការបង្រៀននិងរៀនតាមបែបរិះរកមានវត្ថុបំណងមេរៀន និងសកម្មភាពដែលបម្រើឱ្យវត្ថុបំណងនោះ។ តារាងទី២ ខាងក្រោមនឹងបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងសមាសភាគនៃការបង្រៀន និងរៀនវិទ្យាសាស្ត្រតាមបែបរិះរកដែលរួមមាន៖ ទំនាក់ទំនងវត្ថុបំណងមេរៀន ការបង្ហាញបាតុភូត សំណួរគន្លឹះ ការស្រាវជ្រាវ និង ការសន្និដ្ឋាន។



រូបទី ២ ៖ ទំនាក់ទំនងរវាងសមាសភាគមេរៀន

ក.សំណួរគន្លឹះ

លក្ខណៈសំខាន់បំផុតដែលធ្វើឱ្យការបង្រៀននិងរៀនតាមបែបរិះរកខុសពីការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបផ្សេងៗទៀត គឺ "**សំណួរគន្លឹះ**" ឬ "**សំណួរចាំបាច់**" ដែលមានតួនាទីសំខាន់នៅក្នុងការបង្រៀន និងរៀន។ ដូចដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងតារាងខាងលើ "**សំណួរគន្លឹះ**" ត្រូវបានបង្កើតឡើងផ្អែកតាមការសង្កេត និងការ

ពិភាក្សារបស់សិស្សទៅលើបាតុភូតវិទ្យាសាស្ត្រ និងបាតុភូតសង្គមដែលគ្រូបានផ្ដល់ឱ្យ។ បន្ទាប់មក សិស្សត្រូវពិភាក្សា និងបង្កើតសម្មតិកម្មដោយមានហេតុផលច្បាស់លាស់ ដើម្បីរៀបចំសកម្មភាពប្រមូលទិន្នន័យសម្រាប់ទាញសេចក្ដីសន្និដ្ឋានមួយ ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងវត្ថុបំណងនៃមេរៀន។

ខ. ការស្រាវជ្រាវនៅក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក

ការស្រាវជ្រាវ រួមមានដូចជា ការពិសោធ ការស្វែងរក ការសង្កេត និងការវិភាគ គួររៀបចំឱ្យបានល្អ ដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹង **សំណួរគន្លឹះ** និងដើម្បីទាញនូវ **សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន** ដូចដែលបានរំពឹងទុក។ ជារឿយៗ កំហុសតែងតែកើតមានចំពោះគ្រូដែលទើបចាប់ផ្ដើមបង្រៀនដោយប្រើវិធីសាស្ត្របង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរកគឺ៖

- ការរៀបចំពិសោធដែលមិនសូវទាក់ទងទៅនឹងសំណួរគន្លឹះ ឬវត្ថុបំណងមេរៀន
- ព័ត៌មានឬខ្លឹមសារមេរៀន ដែលទទួលបាន ការស្វែងរកនៅក្នុងក្រុមពិភាក្សានីមួយៗមិនទាក់ទងនឹងសំណួរគន្លឹះ ឬវត្ថុបំណងមេរៀន
- ការយកចិត្តទុកដាក់តិចតួចទៅនឹងលទ្ធផលរបស់សិស្ស ដែលខុសឆ្ងាយទៅនឹងលទ្ធផលដែលរំពឹងទុក និងចំណុចផ្សេងៗទៀត ។

បញ្ហាដែលកើតមានទាំងអស់ខាងលើ បណ្ដាលមកពីគ្រូមានបទពិសោធន៍តិចតួច ចំណេះដឹងខាងមុខវិជ្ជាឯកទេសខ្សោយ វិធីសាស្ត្របង្រៀននៅមានកម្រិត និងលំដាប់លំដោយពិសោធ ឬការរៀបចំឯកសារ ឬប្រមូលឯកសារមិនច្បាស់លាស់។ ដូចនេះ ដើម្បីអនុវត្តនូវការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរកបានល្អទាមទារឱ្យគ្រូសិក្សាស្រាវជ្រាវឱ្យបានច្រើនអំពីខ្លឹមសារដែលត្រូវបង្រៀន។

ឃ. សេចក្ដីសន្និដ្ឋានលើការបង្រៀននិងរៀនតាមបែបរិះរក

យើងត្រូវតែមានការប្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់លើ "ការសន្និដ្ឋាន" ចំពោះការបង្រៀន និងរៀនតាមរិះរក។ គួររំឭកថា គ្រូមិនត្រូវធ្វើសេចក្ដីសន្និដ្ឋាននោះទេ ក៏ប៉ុន្តែសិស្សទៅវិញទេដែលត្រូវទាញសេចក្ដីសន្និដ្ឋានដោយផ្អែកលើសកម្មភាពស្រាវជ្រាវឬលទ្ធផលពិសោធរបស់ពួកគេ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ចំពោះបញ្ហានេះ លទ្ធផលពិសោធឬលទ្ធផលស្រាវជ្រាវមួយចំនួនពិតជានឹងមានកំហុស ឬល្អៀងខ្លះៗ ដែលនាំឱ្យមានការសន្និដ្ឋានខុសពីការរំពឹងទុកជាក់ជាពុំខាន។ ភាគច្រើនលទ្ធផលទាំងនោះបណ្ដាលមកពីជំនាញនៃការវាស់វែង ឬការស្រាវជ្រាវរបស់សិស្សពុំបានត្រឹមត្រូវ និងមួយចំនួនទៀត គឺកំហុសដែលមិនអាចជៀសផុត ហើយតែងតែកើតមាននៅក្នុងការពិសោធ ឬការស្រាវជ្រាវ។ គ្រូត្រូវតែពិនិត្យរាល់ដំណើរការទាំងអស់នៅក្នុងពិសោធ ឬស្រាវជ្រាវរបស់សិស្សហើយជួយសិស្សធ្វើឱ្យបានត្រឹមត្រូវ។ប្រសិនបើមានការសន្និដ្ឋានផ្សេងៗគ្នាក្នុងចំណោមក្រុមសិស្សផ្សេងៗគ្នានោះគ្រូត្រូវតែសម្រេចចិត្តថា តើពួកគេត្រូវបន្តការពិភាក្សាតទៅទៀត ឬសម្របសម្រួលឱ្យពួកគេទាញសេចក្ដីសន្និដ្ឋានដែលសិស្សភាគច្រើននៅក្នុងថ្នាក់អាចទទួលយកបាន (ប៉ុន្តែមិនត្រូវបង្ខំនោះទេ) ឬក៏បង្រៀនមេរៀនមួយផ្សេងទៀត ដើម្បីបញ្ជាក់ការសន្និដ្ឋានណាមួយត្រឹមត្រូវអាចទទួលយកបាន។

ម្យ៉ាងទៀត វាហាក់បីដូចជាគ្រូវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមភាគច្រើនមានការច្រឡំរវាង "**ការសន្និដ្ឋាន**" និង "**លទ្ធផលពិសោធ ឬលទ្ធផលស្រាវជ្រាវ**" តែការពិត គឺវាខុសគ្នាទាំងស្រុង។ ដូចដែលមាន បង្ហាញនៅក្នុងតារាងទី២ លទ្ធផលពិសោធឬលទ្ធផលស្រាវជ្រាវ គឺមានន័យថាជាព័ត៌មានដែលទទួលបាន ក្រោយពីការធ្វើពិសោធឬការស្រាវជ្រាវ។ សន្និដ្ឋានបានមកពីវិភាគទៅលើលទ្ធផលពិសោធឬលទ្ធផលនៃការស្រាវជ្រាវ វាមិនត្រឹមតែ បានផ្ដល់នូវចម្លើយចំពោះសំណួរគន្លឹះប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែវាថែមទាំងបានឆ្លើយតបទៅនឹងវត្ថុបំណងនៃមេរៀនទៀតផង។

១.៣. ពីបាតុភូតវិទ្យាសាស្ត្រ ឬព្រឹត្តិការណ៍សង្គមទៅជាការរិះរក

១.៣.១. សំណួរគន្លឹះ និងការបង្ហាញពីបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍

ការបង្ហាញពីបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍ គឺជាសកម្មភាពតូចមួយធ្វើនៅដើមមេរៀនដែលគ្រូទាញការយកចិត្តទុកដាក់របស់សិស្សទៅលើខ្លឹមសារនៃមេរៀន ហើយជួយឱ្យពួកគេបង្កើតនូវ **សំណួរគន្លឹះ** បាន។

ជាទូទៅ **ការបង្ហាញពីបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍** ចាប់ផ្តើមឡើងចេញពីការសង្កេតបាតុភូតធម្មជាតិ និងព្រឹត្តិការណ៍សង្គមនានាជាយថាហេតុ រូបភាព ឬវីដេអូដែលទាក់ទាញ។ល។ ដំណើរការនេះបន្តដោយការពិភាក្សារបស់សិស្សតាមរយៈការផ្តើមសំណួរដោយ "**ហេតុអ្វី**" ឬ "**មានអ្វីប្រសិនបើ**" ឬអ្វីមួយដែលជំរុញការគិតរបស់សិស្ស។ ឆ្លងតាមរយៈសកម្មភាពនេះ គ្រូវចាប់ផ្តើមបង្រួមទំហំការគិតរបស់សិស្សឱ្យកាន់តែតូចទៅៗ ដើម្បីផ្តោតលើសំណួរគន្លឹះរបស់មេរៀន ។

ចូរចាំថា "**ការបង្ហាញពីបាតុភូតឬព្រឹត្តិការណ៍**" មិនចាំបាច់ធ្វើឡើងគ្រប់មេរៀនទេ វាអាចលុបចោលបានប្រសិនបើមេរៀនថ្ងៃនេះទាក់ទងផ្ទាល់ទៅនឹងមេរៀននៅម៉ោងមុន។

១.៣.២. ឧទាហរណ៍ពី "ការបង្ហាញបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍" ឆ្ពោះទៅ "សំណួរគន្លឹះ"

ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនឹងជួយឱ្យលោកគ្រូ-អ្នកគ្រូយល់ពីរបៀបបង្ហាញបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍ និងការបង្រួមការពិភាក្សាឆ្ពោះទៅរកសំណួរគន្លឹះ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ បាតុភូតរូប ឬព្រឹត្តិការណ៍រូប

គ្រូចែកសិស្សជាក្រុម ហើយឱ្យចង្កឹះបីដើមដែលមានប្រវែងខុសៗគ្នាឱ្យក្រុមនីមួយៗ។ គ្រូប្រាប់សិស្សឱ្យយកចង្កឹះទាំងបីរៀបចេញជារូបត្រីកោណបន្ទាប់មកសួរទៅសិស្ស"តើប្អូនអាចរៀបចង្កឹះទាំងបីចេញជារូបត្រីកោណដែរឬទេ? ព្រោះអ្វី?" ព្យាយាមលើកទឹកចិត្តសិស្សឱ្យរកចម្លើយក្នុងការពិសោធនេះដោយខ្លួនឯង។

ឧទាហរណ៍ទី២ ៖ ព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងដោយយថាហេតុ

គ្រូលើកឡើងពីសមីការបន្ទាត់ពីរ $d_1 : y = x + 3$ និង $d_2 : y = -x + 7$ ហើយឱ្យសិស្សសង់វាក្នុងប្លង់កូអរដោនេ។ បន្ទាប់មកឱ្យសិស្សសង្កេតមើលពីលក្ខណៈនៃបន្ទាត់ទាំងពីរ។ សិស្សបានឆ្លើយទៅតាមការយល់ឃើញរបស់ពួកគេ រួចគ្រូប្រាប់ចម្លើយទៅសិស្សថា បន្ទាត់ទាំងពីរគឺកែងគ្នា។ ក្នុងករណីនេះសិស្សអាចបង្កើតសំណួរគន្លឹះថា ហេតុអ្វីបានជាបន្ទាត់កែងគ្នា?

ឧទាហរណ៍ទី៣ ៖ ការប្រើរូបភាព

ធម្មតាក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ដែលទាក់ទងនឹងធរណីមាត្រ គឺមិនអាចខ្វះនូវរូបភាពសម្រាប់មើលបានទេ។ គ្រូត្រូវព្យាយាមឱ្យសិស្សរៀនគូររូបដោយខ្លួនឯងទៅតាមបម្រាប់នៃប្រធាន បន្ទាប់មកគ្រូធ្វើការកែលម្អចំណុចដែលមិនទាន់ត្រឹមត្រូវ បន្ទាប់មកទៀតសិស្សបកស្រាយចម្លើយដោយមើលរូបភាពរហូតដល់អ្វីដែលលំហាត់ចង់បាន។

១.៣.៣. របៀបបង្កើតសំណួរគន្លឹះ

សំណួរគន្លឹះនៅក្នុងមេរៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក គឺមានទំនាក់ទំនងយ៉ាងជិតស្និទ្ធទៅនឹងវត្ថុបំណងនៃមេរៀន។ ម្យ៉ាងទៀត សំណួរគន្លឹះគួរតែត្រូវបានបង្កើតឡើងធ្វើយ៉ាងណា ដើម្បីឱ្យសិស្សអាចសម្រេចបាននូវវត្ថុបំណងមេរៀនតាមរយៈការឆ្លើយសំណួរគន្លឹះនេះ។

ឧទាហរណ៍៖ ប្រសិនបើវត្ថុបំណងមេរៀន

"សិស្សនឹងអាចសម្រួលកន្សោមសនិទានបានត្រឹមត្រូវ" នោះសំណួរគន្លឹះអាចជា៖

ដើម្បីសម្រួលកន្សោមសនិទានតើគេត្រូវធ្វើដូចម្តេច?

ក្នុងមេរៀននេះសិស្សនឹងដឹងពីជំហាននៃការ សម្រួលកន្សោមសនិទានបានច្បាស់លាស់។ វាកាន់តែល្អប្រសើរ ប្រសិនបើសិស្សអាចបង្កើតសំណួរគន្លឹះបែបនេះដោយខ្លួនឯងក្នុងពេលរៀនមេរៀន ពីព្រោះពួកគេកាន់តែមានឆន្ទៈចង់ដោះស្រាយបញ្ហា ឬរកឱ្យឃើញនូវចម្លើយរបស់សំណួរគន្លឹះនោះ ប្រសិនបើសំណួរនោះសួរចេញពីពួកគេផ្ទាល់។ ដូច្នេះ គ្រូបង្រៀនត្រូវគិតពីរបៀបនាំសិស្សឱ្យទៅដល់សំណួរគន្លឹះ ដូចជាតាមរយៈការបង្ហាញពីបាតុភូតវិទ្យាសាស្ត្រ បាតុភូតវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមឬព្រឹត្តិការណ៍នានាដែលទាក់ទងទៅនឹងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់សិស្ស ហើយដែលសិស្សនឹងត្រូវធ្វើការបកស្រាយនៅជំហានបន្តបន្ទាប់។

១.៤. វាយតម្លៃការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរក

១.៤.១. តើគោលបំណងរបស់យើងគឺជាអ្វី?

គ្រូបង្រៀនជាច្រើនបានសួរសំណួរដូចជា៖ តើគ្រូបង្រៀនចាំបាច់ត្រូវមានចំណេះដឹង ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម និងផ្នែកការរិះរកកម្រិតណា ដើម្បីអាចបង្រៀនមេរៀនវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមតាមបែបរិះរកបាន?

ជាការពិតណាស់ មានចំណេះដឹងបែបនេះកាន់តែច្រើនកាន់តែប្រសើរ។ ប្រសិនបើគ្រូបង្រៀនមានចំណេះដឹងច្រើនអំពីការរិះរកលើមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ និងលើមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមនោះការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរករបស់គាត់នឹងរឹតតែមានប្រសិទ្ធភាពថែមទៀត។ ដូច្នេះគ្រូបង្រៀនត្រូវបានលើកទឹកចិត្តឱ្យរៀន និងស្រាវជ្រាវបន្ថែមគ្រប់ពេលវេលាមិនត្រឹមតែតាមរយៈវគ្គបំប៉នប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែក៏តាមរយៈគ្រូបង្រៀនដ៏ទៃទៀតដែលជាសហការីព្រមទាំងសិស្សផងដែរ។ *ការគិតថាខ្លួនគ្រប់គ្រាន់ហើយ វាគឺជាសត្រូវនៃការធ្វើឱ្យប្រសើរឡើង*។ ម្យ៉ាងទៀត គ្រូបង្រៀនដែលផ្តោតទៅលើកម្រិតនៃការរិះរកតែងតែសួរសំណួរដូចជា៖

តើសិស្សត្រូវធ្វើការរិះរកកម្រិតណាក្នុងមេរៀនតាមបែបរិះរកនេះ? មិនមានចម្លើយច្បាស់លាស់ សម្រាប់សំណួរនេះទេហើយថែមទាំងមានការយល់ច្រឡំមួយចំនួនក្នុងចំណោមគ្រូបង្រៀនដូចជាថា "មេរៀន របស់ខ្ញុំ និងមេរៀនរបស់គាត់មានកម្រិតការរិះរកខុសគ្នា ប៉ុន្តែតើយើងអាចហៅមេរៀនទាំងពីរនេះថាជាមេរៀនបែបរិះរកដែរឬទេ?" ។ល។

វាត្រូវបានគេស្គាល់យ៉ាងទូលំទូលាយថាពិតជាមានកម្រិតនៃការរិះរកច្រើនមែន។ខណៈពេលដែល អ្នកនិពន្ធខុសគ្នាបានផ្តល់នូវគំនិតខុសៗគ្នាក្នុងឯកសារនេះ យើងសូមលើកទ្រឹស្តីរបស់លោក Fay & Bretz (2008) ស្តីពីកម្រិតនៃការរិះរកនេះពីព្រោះវាហាក់ដូចជាងាយយល់ និងអាចអនុវត្តបាននៅក្នុងប្រទេសកម្ពុជា។

១.៤.២. កម្រិតនៃការរិះរក

លោក Fay & Bretz (2008)បានស្នើឡើងនូវកម្រិតនៃការរិះរកដូចមានក្នុងតារាងទី១ ដែលផ្តោតទៅលើ៣ ចំណុចទាក់ទងទៅនឹងសកម្មភាពស្រាវជ្រាវ និងសកម្មភាពមន្ទីរពិសោធន៍ដូចជា ៖

- បញ្ហា ឬសំណួរដែលសិស្សត្រូវធ្វើការដោះស្រាយ
- ដំណើរ ឬវិធីសាស្ត្រដែលសិស្សត្រូវប្រើសម្រាប់ធ្វើការសង្កេត
- ចម្លើយ ឬសេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលសិស្សត្រូវបង្កើតឡើងនូវទីបញ្ចប់។

តារាងទី១ និងទី២ ខាងក្រោមនឹងផ្តល់នូវសេចក្តីលម្អិតអំពីកម្រិតនៃការរិះរកនីមួយៗ។

តារាងទី១ ៖ កម្រិតនៃការរិះរក

កម្រិត	បញ្ហា ឬសំណួរគន្លឹះ	ដំណើរការ ឬវិធីសាស្ត្រ	សេចក្តីសន្និដ្ឋាន
០	ផ្តល់ឱ្យសិស្ស	ផ្តល់ឱ្យសិស្ស	ផ្តល់ឱ្យសិស្ស
១	ផ្តល់ឱ្យសិស្ស	ផ្តល់ឱ្យសិស្ស	បង្កើតឡើងដោយសិស្ស
២	ផ្តល់ឱ្យសិស្ស	បង្កើតឡើងដោយសិស្ស	បង្កើតឡើងដោយសិស្ស
៣	បង្កើតឡើងដោយសិស្ស	បង្កើតឡើងដោយសិស្ស	បង្កើតឡើងដោយសិស្ស

ប្រភព: Fay & Bretz (2008)

តារាងទី២ ៖ សេចក្តីលម្អិតនៃកម្រិតរិះរកនីមួយៗ

កម្រិត	សេចក្តីលម្អិត (លក្ខណៈសម្គាល់នៃកម្រិតនីមួយៗគឺបង្ហាញដោយអក្សរផ្តិត និងទ្រេត)
០	សំណួរគន្លឹះ ដំណើរការរុករកចម្លើយ និងសេចក្តីសន្និដ្ឋានត្រូវបាន*ផ្តល់ឱ្យសិស្ស*។ សិស្សធ្វើការស្រាវជ្រាវ ឬពិសោធន៍ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយជាមួយនឹងសៀវភៅសិក្សា។
១	សំណួរគន្លឹះ និងដំណើរការត្រូវ*ផ្តល់ឱ្យសិស្ស*។ សិស្ស*ពន្យល់ បកស្រាយ* ទិន្នន័យស្រាវជ្រាវ ឬពិសោធន៍ និងផ្តល់សេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលសមហេតុផល។
២	សំណួរគន្លឹះត្រូវបាន*ផ្តល់ឱ្យសិស្ស*។ សិស្សត្រូវ *គិត និងរៀបចំ* ដំណើរការដើម្បីធ្វើការសង្កេត *កំណត់* ទិន្នន័យដែលត្រូវវាស់វែង និង*បកស្រាយ* ទិន្នន័យពិសោធ ឬលទ្ធផលស្រាវជ្រាវដែលសមហេតុផល។
៣	បាតុភូតមួយត្រូវបានផ្តល់ឱ្យសិស្ស។ សិស្ស*ធ្វើការបង្កើត* (ឬសំយោគ) បញ្ហា ឬសំណួរគន្លឹះមួយ រួចសិស្សត្រូវ *គិតនិងរៀបចំ* ដំណើរការដើម្បីធ្វើការសង្កេត*កំណត់* ទិន្នន័យដែលត្រូវវាស់វែងនិង*បកស្រាយ* ទិន្នន័យស្រាវជ្រាវ ឬពិសោធ និងផ្តល់សេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលសមហេតុផល។

ប្រភព: Fay & Bretz (2008)

ដូចដែលបានឃើញក្នុងតារាងខាងលើ សេរីភាព និងការទទួលខុសត្រូវរបស់សិស្សមានការកើនឡើងពីកម្រិត ០ ទៅ ៣ ។ កម្រិត៣ ត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជាកម្រិតល្អបំផុតនៃការរិះរក។ ដូច្នេះ អ្នកអាចវាយតម្លៃការបង្រៀន និងរៀនរបស់អ្នកថា តើវាស្ថិតនៅក្នុងកម្រិត១ ហើយឬនៅ? សូមចងចាំថានៅកម្រិត ០ មានន័យថា"គ្មានការរិះរក" ទេ។

ទោះបីជាមិនអាចរៀបចំការបង្រៀន និងរៀនតាមបែបរិះរកបានសម្រាប់គ្រប់មេរៀនវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិទ្យាសាស្ត្រទាំងអស់ក៏ដោយ តារាងខាងលើអាចផ្តល់គំនិត និងគោលដៅដែលអាចសាកល្បងបានអាស្រ័យទៅលើការខិតខំប្រឹងប្រែងរបស់គ្រូបង្រៀន និងស្ថានភាពជាក់ស្តែង(កម្រិតយល់ដឹង)របស់សិស្ស ព្រមទាំងបរិស្ថាន និងសម្ភាររបស់សាលាផងដែរ។ ប្រសិនបើ ការបង្រៀន និងរៀនរបស់អ្នកជាធម្មតា ស្ថិតិនៅកម្រិត០ ជាដំបូងអ្នកអាចសាកល្បងបន្តទៅកម្រិត១ ឬកម្រិត២ ។ តែប្រសិនបើ មេរៀនរបស់អ្នកបានទៅដល់កម្រិត៣ ហើយនោះអ្នកត្រូវបន្តធ្វើការកែលម្អគុណភាព ឬប្រសិទ្ធភាពរបស់សកម្មភាពនីមួយៗ បន្ថែមទៀត។ ការកែលម្អ គឺគ្មានទីបញ្ចប់នោះឡើយ។

១.៥.រៀបអភិវឌ្ឍការបង្រៀន និងរៀន

១.៥.១.ប្រការយល់ដឹងមុនពេលធ្វើកិច្ចតែងការបង្រៀន

នៅក្នុងការបង្រៀនមេរៀនតាមបែបរិះរក សំខាន់បំផុតត្រូវជួយឱ្យសិស្ស អាចបង្កើតសំណួរ ឬចម្ងល់នៅក្នុងចិត្តរបស់ពួកគេបាន តាមរយៈការបង្ហាញបាតុភូតធម្មជាតិ ឬព្រឹត្តិការណ៍សង្គម ដែលទាក់ទងទៅនឹងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់ពួកគេ ជាជាងប្រាប់ពួកគេអំពីវត្ថុបំណងមេរៀនដោយផ្ទាល់។

បន្ទាប់ពីការកំណត់បញ្ហា (សំណួរគន្លឹះ) រួចហើយ គ្រូត្រូវធ្វើការសម្របសម្រួលឱ្យសិស្សធ្វើការពិភាក្សាគ្នាអំពីអ្វីដែលពួកគេត្រូវធ្វើការសង្កេត និងថា តើពួកគេត្រូវធ្វើដូចម្ដេចខ្លះ? នៅទីនេះតួនាទីរបស់គ្រូ គឺត្រូវបង្កើតបរិយាកាសមួយដែលនាំឱ្យសិស្សអាចចែករំលែកមតិយោបល់រវាងគ្នានិងគ្នា ដោយសេរី និងយ៉ាងសកម្ម។ គ្រូបង្រៀនមិនត្រូវជ្រៀតជ្រែក ឬរំខានដល់ការពិភាក្សារបស់សិស្សឡើយ ប៉ុន្តែត្រូវជំរុញការគិតរបស់សិស្សដូចជាការបំផុសគំនិតផ្ទុយទៅនឹងគំនិតសិស្ស ឬការផ្ដល់គំនិតខុសទាំងស្រុងជាដើម។ ប្រសិនបើ ការពិភាក្សារបស់សិស្សត្រូវបានកាច់ចង្កូតដោយគ្រូ សិស្សពុំអាចយល់បានច្បាស់លាស់នោះទេ ថាតើហេតុអ្វីបានជាពួកគេត្រូវធ្វើដូច្នោះ នៅពេលគេធ្វើពិសោធ ឬធ្វើការស្រាវជ្រាវ ហើយវានឹងនាំទៅដល់ភាពបរាជ័យក្នុងការសម្រេចបាននូវវត្ថុបំណងមេរៀន។

១.៥.២.ដំណើរការអភិវឌ្ឍកិច្ចតែងការបង្រៀនតាមបែបរិះរក

ក្នុងការអភិវឌ្ឍកិច្ចតែងការបង្រៀនមួយ លំនាំ "ធ្វើផែនការបញ្ច្រាស់" ត្រូវបានគេប្រើជាញឹកញាប់។ តាមរបៀបនេះ គ្រូបង្រៀនត្រូវការពិចារណាអំពីដំណើរការមេរៀនតាមលំដាប់ដោយ ចាប់ផ្ដើមពី ៖វត្ថុបំណងមេរៀន សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន សកម្មភាព/ពិសោធន៍ សំណួរគន្លឹះ ការបង្ហាញបាតុភូត។ វិធីសាស្ត្រ នេះអាចជួយឱ្យគ្រូបង្រៀនបន្តផ្ដោតអារម្មណ៍លើវត្ថុបំណងរបស់មេរៀន។

ក. ការកំណត់វត្ថុបំណងមេរៀន

ដំបូងគ្រូត្រូវតែពន្យល់អំពីវត្ថុបំណងរបស់មេរៀន ឬជំពូកជាមុនសិន។ បន្ទាប់មកគាត់ត្រូវធ្វើការពិចារណាអំពីចំណេះដឹង និងជំនាញដែលសិស្សគួរទទួលបាន តាមមេរៀននីមួយៗ។ សូមចងចាំថាការបង្រៀននិងរៀនកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាព កាលណាវត្ថុបំណងនៃមេរៀន ដែលបានកំណត់ឡើងទំនាក់ទំនងទៅនឹងមេរៀនមុន និងមេរៀនដែលគ្រូត្រូវបង្រៀនបន្ទាប់។ ប្រសិនបើ វត្ថុបំណងនៃមេរៀននីមួយៗត្រូវបានកំណត់ដាច់ៗពីគ្នា (គ្មានទំនាក់ទំនង) នោះឱកាសនៃការសិក្សាតាមដានបន្តរបស់សិស្ស និងត្រូវបាត់បង់ជាក់ជាមិនខានឡើយ។

ខ. ការកំណត់សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន និងសកម្មភាពនានា

ដោយផ្អែកទៅលើវត្ថុបំណងនៃមេរៀន ដែលបានកំណត់ខាងលើ គ្រូបង្រៀនត្រូវគិតថា តើសិស្សនឹងធ្វើសកម្មភាពអ្វី និងយ៉ាងដូចម្ដេចនៅក្នុងដំណើរកាសិក្សារបស់ពួកគេ។

ឧទាហរណ៍៖ ប្រសិនបើ វត្ថុបំណងមេរៀនជា"សិស្សកំណត់បានពីរូបមន្តស៊ីនុស" នោះសិស្សនឹងត្រូវធ្វើការសិក្សាពីទំនាក់ទំនងផលធៀបរវាងស៊ីនុសនៃមុំក្នុងនិងរង្វាស់ជ្រុងឈមនៃមុំក្នុងនីមួយៗនៃត្រីកោណតាមរយៈការពិសោធទៅលើការវាស់វែង និងការគណនាព្រមទាំងការបកស្រាយតាមទ្រឹស្ដីគណិតវិទ្យាដើម្បីរកឱ្យឃើញពីរូបមន្តស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ។

គ.ការកំណត់សំណួរគន្លឹះ

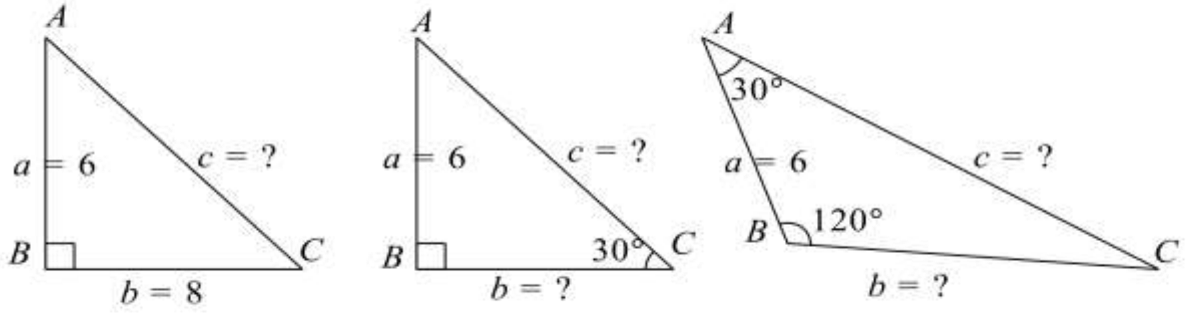
បន្ទាប់មកទៀត គ្រូបង្រៀនត្រូវតែគិតអំពីថា តើសំណួរគន្លឹះបែបណាដែលគួរបង្កើតឡើង ដើម្បីឱ្យសិស្សអាចចាប់ផ្ដើមសកម្មភាព ដូចរៀបរាប់ខាងលើ។ សំណួរនេះត្រូវធ្វើយ៉ាងណាឱ្យច្បាស់ និងងាយយល់បំផុត។

ឧទាហរណ៍៖ ចំពោះត្រីកោណសមញ្ញមួយ បើគេស្គាល់រង្វាស់មុំក្នុងពីរ និងរង្វាស់ជ្រុងមួយ តើគេអាចគណនារង្វាស់ជ្រុងមួយផ្សេងទៀតបានដែរឬទេ ?

១.៥.៣.ការកំណត់ពីបាតុភូតផ្សេងៗដែលត្រូវបង្ហាញ

នៅដំណាក់កាលចុងក្រោយគ្រូបង្រៀនត្រូវគិតអំពីវិធីដ៏មានប្រសិទ្ធភាពបំផុត ដើម្បីជួយសិស្សឱ្យអាចបង្កើតចម្ងល់ ឬសំណួរគន្លឹះក្នុងចិត្តរបស់ពួកគេ។ ចូរព្យាយាមរកមើលរាល់បាតុភូតនៅជុំវិញខ្លួនយើង រកមើលសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រ សៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមផ្សេងៗ និងស្វែងរកបាតុភូតធម្មជាតិ (រូបវិទ្យា ឬ គីមីវិទ្យា ផែនដីវិទ្យា ភូមិវិទ្យា ឬបរិស្ថាន) ឬហេតុការណ៍ផ្សេងៗ ឬព្រឹត្តិការសង្គមផ្សេងៗ ឬរូបភាពគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ ដើម្បីជួយជំរុញការគិតរបស់សិស្សឱ្យកាន់តែស៊ីជម្រៅ។

ឧទាហរណ៍៖ ដើម្បីជួយឱ្យសិស្ស អាចបង្កើតសំណួរគន្លឹះក្នុងខ្លឹមសារមេរៀន រូបមន្តស៊ីនុស គ្រូបង្រៀនគួរចាប់ផ្តើមតាមរយៈការបង្ហាញ ត្រីកោណដែលមានសម្មតិកម្មបីផ្សេងគ្នាដូចរូបខាងក្រោម។



កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី១

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃចន្ទ ១២កើត ខែអស្សុច ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤ត្រូវនឹងថ្ងៃទី២១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១០ (ភាគ១)

ជំពូក៣ ៖ សមីការ និងវិសមីការ

មេរៀនទី២ ៖ សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

១.៣. រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

ក. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

រយៈពេល ៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង ៖** ក្រោយពីបញ្ចប់ខ្លឹមសារនៃមេរៀននេះ

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សកំណត់រូបមន្តដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាតតាមឌីសគ្រីមីណង់បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាជាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាតតាមឌីសគ្រីមីណង់បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាជាក្រុម។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សបណ្តុះទម្លាប់ពិភាក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្របសម្រួលរបស់គ្រូ ។

II. **សម្ភារឧបទេស**

-សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ១០៣-១០៥

-កម្រងសំណួរ សន្លឹកកិច្ចការ

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមបែបរិះរក

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (៣នាទី)	
គ្រូពិនិត្យអវត្តមានអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ	អវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ	ប្រធានឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់និងអនាម័យ
	ជំហានទី២៖ រំលឹកមេរៀនចាស់ (៥នាទី)	
គ្រូដាក់លំហាត់លើក្តារខៀនឱ្យសិស្សដោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយបំពេញជាការ។ $3x^2-4x+1=0,(1)$	ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ដោយបំពេញជាការ។ $3x^2-4x+1=0$	

	ចម្លើយ $3x^2-4x+1=0$ $\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\left(x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right)=0$ $\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right]=0$ $\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{9}\right]=0$ $\left(x-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$ $x-\frac{2}{3}=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$ $x_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$; $x_2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ដូចនេះ $x_1=1$; $x_2=\frac{1}{3}$	$3x^2-4x+1=0$ $\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\left(x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right)=0$ $\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right]=0$ $\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{9}\right]=0$ $\left(x-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$ $x-\frac{2}{3}=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$ $x_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$; $x_2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ដូចនេះ $x_1=1$; $x_2=\frac{1}{3}$
ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣៥នាទី)		
១.ការបង្ហាញបាតុភូត(២នាទី) -គ្រូសរសេរសមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត រួចសួរ៖ -តើប្អូនអាចប្រាប់បានទេ តើសមីការទី (1) និង (2) ខុសគ្នាត្រង់ចំណុចណា? ២.សំណួរបំផុស (២នាទី) តាមរយៈសមីការ (2) តើគេចង់បានអ្វីខ្លះ? ៣.សម្មតិកម្ម(១ នាទី) តើប្អូនអាចឱ្យចម្លើយ	**មេរៀនទី១៖** **សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត** **១.៣. រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២** **ក.ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត** សមីការដឺក្រេទី $ax^2+bx+c=0$,(2)	សមីការទី (1) និង (2) ខុសគ្នាត្រង់មេគុណនៃសមីការទី(១)ជាចំនួនពិត ហើយមេគុណនៃសមីការទី(២) ជាអថេរ។ ២. សំណួរគន្លឹះ(២នាទី) -តើយើងអាចដោះស្រាយរកឫសនៃសមីការរាង $ax^2+bx+c=0$ បានដែរឬទេ? ៣. សម្មតិកម្ម(១នាទី) -យើងអាចដោះស្រាយសមីការខាងលើបានតាមរយៈការបំពេញជាការេ។

(ព្យាករណ៍)ចំពោះ សំណួរ ខាងលើ របស់ប្អូនបានដែ ឬទេ? ៤.វិធីស្រាវជ្រាវ(១០នាទី) -តើប្អូននឹងបញ្ជាក់ថាអំណះអំណាងខាងលើពិតតាមរបៀបណា? -គ្រូបែងចែកសិស្សជាក្រុម ដោយចៃដន្យ រួចចែកសន្លឹកកិច្ចការ -សិស្សដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ក្នុងសន្លឹកកិច្ចការ -ឱ្យសិស្សបំពេញ សន្លឹកកិច្ចការតាម ក្រុមរបស់ខ្លួន ដោយ គ្រូដើរសម្របសម្រួល ៥. លទ្ធផល(៥នាទី) គ្រូឱ្យក្រុមនីមួយៗ បង្ហាញ លទ្ធផល ៦. សន្និដ្ឋាន(១៥នាទី) -គ្រូឱ្យសិស្សធ្វើការសន្និដ្ឋាន -គ្រូសម្របសម្រួល	សមីការដឺក្រេទី២មានរាង $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ មានឫស $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ហៅថារូបមន្តឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២។	៤. វិធីស្រាវជ្រាវ -ធ្វើពិសោធ តាមការដោះស្រាយ សមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានមេគុណ ជាចំនួនពិត តាមការបំពេញជាការេ។ -សិស្សដោះស្រាយសមីការក្នុងសន្លឹកកិច្ចការ -សិស្សពិភាក្សាសួរសំណួរ និង បំពេញសន្លឹកកិច្ចការ ៥.លទ្ធផល តំណាងក្រុមបង្ហាញលទ្ធផល ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី មួយ $ax^2+bx+c=0$ ។ ដើម្បីឱ្យមេគុណ x^2 ស្មើនឹងមួយ គេចែកអង្គទាំងពីរនឹង a គេបាន $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ លើក $\frac{c}{a}$ ទៅអង្គទី២ យើងបាន $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ បូក $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ លើអង្គទាំងពីរ $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ៦. សន្និដ្ឋាន -សិស្សពិភាក្សា និងធ្វើការសន្និដ្ឋាន ដូចក្នុងខ្លឹមសារ

-គ្រូធ្វើការសំយោគ	ម៉្យាងទៀតចម្លើយនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ **តាមឌីសគ្រីមីណង់** $\Delta=b^2-4ac$ 1) ចំពោះ $\Delta>0$ នោះសមីការមានឫសជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ 2) ចំពោះ $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ 3) ចំពោះ $\Delta<0$ នោះសមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $x=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $x=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ តាម(1) និង (2) យើងបាន $\Delta\geq 0$ សមីការមានឫសជា **ចំនួនពិត** ។	-សិស្សស្តាប់សួរ និងកត់ត្រា
ជំហានទី៤ ៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (៥នាទី)		
គ្រូឱ្យសិស្ស គណនារកឫសនៃសមីការខាងលើគឺ(ក.ខ.គ) តាមឌីសគ្រីមីណង់ -គ្រូបង្ហាញចម្លើយ	ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ក. $2x^2+3x+1=0$ $\Delta=b^2-4ac$ $=3^2-4(2)(1)=1$ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$ $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+1}{4}=-\dfrac{1}{2}$ $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-1}{4}=-1$ ដូចនេះ $\boxed{x_1=-\dfrac{1}{2}\ ;\ x_2=-1}$ ខ. $x^2+4x+4=0$ $\Delta=b^2-4ac$ $=4^2-4(1)(4)=0$ $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2}=-2$ ដូចនេះ $\boxed{x_1=x_2=-2}$	-សិស្សដោះស្រាយដោយបុគ្គល -សិស្សសួរ កត់ត្រា

	គ. $2x^2-4x+5=0$ $\Delta=b^2-4ac$ $=(-4)^2-4(2)(5)=-24$ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-24}=i2\sqrt{6}$ $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+i2\sqrt{6}}{4}=1+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-i2\sqrt{6}}{4}=1-i\frac{\sqrt{6}}{2}$ ដូចនេះ $\boxed{x_1=1+i\frac{\sqrt{6}}{2}\ ;\ x_2=1-i\frac{\sqrt{6}}{2}}$	
ជំហានទី៥ ៖ កិច្ចការផ្ទះនិងបណ្តាំផ្ញើ (២នាទី)		
គ្រូដាក់កិច្ចការផ្ទះ ឱ្យសិស្ស	លំហាត់ប្រតិបត្តិ១ ទំព័រ105	សិស្សកត់លំហាត់ រួចជំរាបលាគ្រូទៅផ្ទះ។

សន្លឹកកិច្ចការ

១.ដោះស្រាយសមីការ $ax^2+bx+c=0$ តាមវិធីបន្ថែមបន្ថយតួ។

២.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម។

ក. $2x^2+3x+1=0$

ខ. $x^2+4x+4=0$

គ. $2x^2-4x+5=0$

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃចន្ទ ១២កើត ខែអស្សុច ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤
ត្រូវនឹងថ្ងៃទី២១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១១ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូក៣ ៖ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

មេរៀនទី៣ ៖ សមីការ និងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

៣. សមីការត្រីកោណមាត្រ

៣.១. សមីការ $\cos x = a$

រយៈពេល ៖ ៤៥នាទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបញ្ចប់ខ្លឹមសារនៃមេរៀននេះ

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សកំណត់បានពីរបៀបដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្របានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សបកស្រាយបានពីរបៀបដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្របានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សមានស្មារតីបម្រុងប្រយ័ត្ន ក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃក្នុងការងារទាក់ទងនឹងសមីការ
- ត្រីកោណមាត្រ ។

II. **សម្ភារឧបទេស**

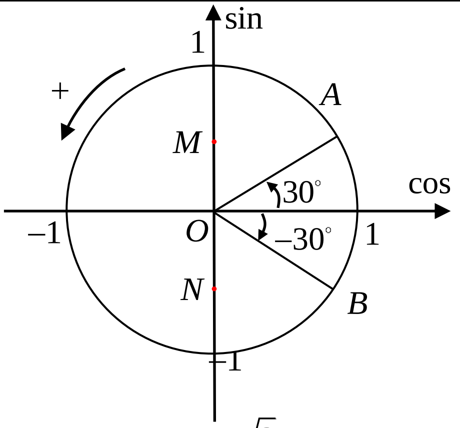
-សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ៩៩-១០១

-វីដេអូ និងសន្លឹកកិច្ចការ

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមបែបរិះរក

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពសិស្ស**
ជំហានទី១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (២នាទី)		
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	គ្រូពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់និងវិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ ៖ រំលឹកមេរៀនចាស់ (៥នាទី)		
ឱ្យសិស្សឡើងវាស់តម្លៃត្រីកោណមាត្រកូស៊ីនុសត្រូវនឹង 30° និង -30°		-សន្និដ្ឋានឆ្លើយ

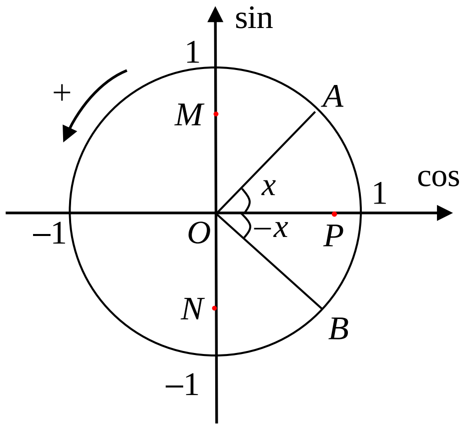
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$\cos\left(-30^\circ\right)=OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(30^\circ\right)=OA=\frac{\sqrt{3}}{2}$</td>
<td>$\cos\left(-30^\circ\right)=OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(30^\circ\right)=OA=\frac{\sqrt{3}}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ជំហានទី៣ ៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣០នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>សរសេរចំណងជើងមេរៀន

១. បង្ហាញរូបឱ្យសិស្សសង្កេតលើរូប

២. បង្កើតសំណួរគន្លឹះ៖
តើរូបទី២មានអ្វីខុសគ្នាពីរូបទី១ ?
តើប្អូនៗមានសំណួរឬសម្ងល់ទៅលើរូបទី១ ?

៣. សម្មតិកម្ម
ចូរប្អូនៗឱ្យចម្លើយដែលប្អូនយល់ឃើញ(ព្យាករណ៍)</td>
<td>មេរៀនទី ៣
សមីការ និងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ
៣. សមីការត្រីកោណមាត្រ
៣.១ ដោះស្រាយសមីការ $\cos x=a$



តើគេអាចរកតម្លៃមុំ x បានដែរឬទេតាមរយៈកូស៊ីនុស ? នៅពេលដែលស្គាល់តម្លៃ OP</td>
<td>

សិស្សសង្កេត

មិនស្គាល់តម្លៃមុំ x
តើគេអាចរកតម្លៃមុំ x បានដែរឬទេ
តាមរយៈកូស៊ីនុស ? នៅពេលដែល
ស្គាល់តម្លៃ OP

អាចរកតម្លៃ x បានលុះត្រាតែប្តូរតម្លៃ OP ទៅកូស៊ីនុស រួចទាញរក x</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>៤. វិធីស្រាវជ្រាវ
តើប្អូនបញ្ជាក់អំណះអំណាងខាងលើពិតតាមរបៀបណា?
ចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្ស
សិស្សសង់រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ
សិស្សបំពេញសន្លឹកកិច្ចការ
៥. លទ្ធផល
ក្រុមនីមួយៗឡើងបង្ហាញលទ្ធផល

៦. សន្និដ្ឋាន
សិស្សធ្វើការសន្និដ្ឋានគ្រូសម្របសម្រួល

តាមការសន្និដ្ឋានតើគេអាចរកចម្លើយសមីការខាងក្រោម $\cos U\left(x\right)=\cos V\left(x\right)$ បានដូចម្តេច ?</td>
<td>| $\cos x=\frac{1}{2}$ | $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | | |

| $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ | $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | |

ចម្លើយនៃសមីការ
$\cos x=OP=\cos\alpha$ ដែល $-1\le OP\le 1$
មានពីរគឺ $x=\alpha+2k\pi$ ឬ
$x=-\alpha+2k\pi$ ចំពោះ $k\notin\mathbb{Z}$</td>
<td>អាចរក x បានលុះត្រាតែប្តូរតម្លៃ $-1<OP<1$

ពិសោធដោយឱ្យតម្លៃ OP ដែល $-1\le OP\le 1$ រួចទាញរកតម្លៃ x

សិស្សសង់រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ
សិស្សពិភាក្សាសួរសំណួរ និងបំពេញសន្លឹកកិច្ចការ

តំណាងក្រុមឡើងបង្ហាញលទ្ធផល

សន្និដ្ឋាន
ចម្លើយនៃសមីការ
$\cos x=\cos\alpha$
មានពីរគឺ $x=\alpha+2k\pi$ ឬ
$x=-\alpha+2k\pi$, $k\notin\mathbb{Z}$
បើ $\cos U\left(x\right)=\cos V\left(x\right)$
មានចម្លើយ
$U\left(x\right)=\pm V\left(x\right)+2k\pi$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ជំហានទី៤ ៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (៥នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ៖ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម
ក. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
ខ. $\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{\pi}{4}$</td>
<td>ក. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ឬ $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$
ខ. $\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{\pi}{4}$
$x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ឬ $x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi$
ដែល $k\notin\mathbb{Z}$</td>
<td>សិស្សធ្វើលំហាត់ជាបុគ្គល
ក. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ឬ
$x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$
ខ.
$\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{\pi}{4}$</td>
</tr>
</table>

		$x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ឬ $x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ ដែល $k\notin$
ជំហានទី៥ ៖ កិច្ចការផ្ទះនិងបណ្តាំផ្ញើ (៣នាទី)		
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៣ដល់៤ ទំព័រ១១០ឱ្យសិស្ស ធ្វើនៅផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	លំហាត់ទី៣ ដល់៤ ទំព័រ ១១០	- សិស្សកត់ត្រាលំហាត់ និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃចន្ទ ១២កើត ខែអស្សុជ ឆ្នាំឆ្លូវ ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤
ត្រូវនឹងថ្ងៃទី២១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១២ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូក១ ៖ លីមីត

មេរៀនទី១ ៖ លីមីតនៃអនុគមន៍

១. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់ និងអនន្ត

រយៈពេល ៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបញ្ចប់ខ្លឹមសារនៃមេរៀននេះ

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សកំណត់បាននិយមន័យលីមីត បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សគណនាលីមីតតាមនិយមន័យ បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សបណ្តុះទម្លាប់ពិភាក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្របសម្រួលរបស់គ្រូ។

II. **សម្ភារឧបទេស**

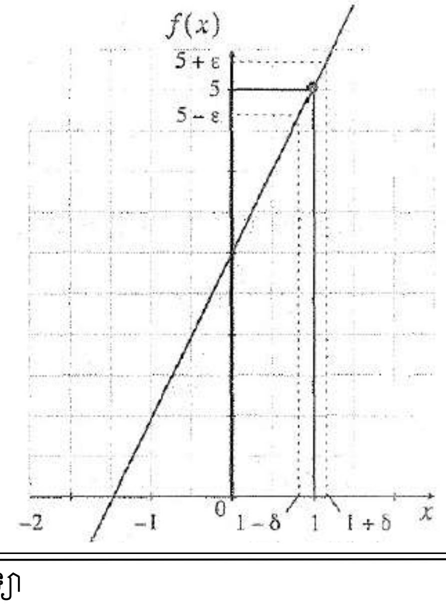
-សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ១៦-១៧

-កម្រងសំណួរ និងសន្លឹកកិច្ចការ

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមបែបរិះរក

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី ១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន (៣នាទី)	
គ្រូពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ		ប្រធានថ្នាក់ឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន
	ជំហានទី ២ ៖ រំលឹកមេរៀន (៧នាទី)	
-ដូចម្តេចហៅថា អនុគមន៍ ? -ដូចម្តេចហៅថា ដែនកំណត់ ?	- ទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ A ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំB នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថា អនុគមន៍ពីសំណុំA ទៅសំណុំB ។ - ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ដែលតាងដោយ D គឺសំណុំអថេរ x ដែលបណ្តា	- ទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ Bភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ A ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំB នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថាអនុគមន៍ពីសំណុំA ទៅសំណុំB ។ - ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

	លឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃ ។	ដែលតាងដោយ D គឺសំណុំអថេរ x ដែលបណ្តាលឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃ
ជំហានទី ៣ ៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣០នាទី)		
គ្រូដាក់លំហាត់អនុគមន៍ - ចូរប្អូនសង្កេតមើលតម្លៃ $f(x)$ ប្រើសិនបើ x ខិតជិត 1 ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ ។ តាមរយៈការជំនួសតម្លៃ x ក្នុង $f(x)$ តើប្អូនអាចបង្កើតសំនួរយ៉ាងដូចម្តេចចំពោះលទ្ធផល ? -ចែកសិស្សជា៥ក្រុម -ឱ្យសិស្សប៉ាន់ស្មានចម្លើយ -ឱ្យសិស្សតាមក្រុមពិភាក្សាដើម្បីបញ្ជាក់ថា $f(x)$ ស្មើ5 កាលណា x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ ។ -ឱ្យសិស្សតាមក្រុមណាដែលស្រាយចេញឡើងធ្វើបទបង្ហាញ	**មេរៀនទី១** លីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x\in\Re-\{1\}$ ដោយ $f(x)=\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq1$ គេបាន $f(x)=\frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=2x+3$ គណនាតម្លៃ $f(x)$ កាលណា $x\in\{0.9, 0.99, 0.999, 0.9999\}$ និង $x\in\{1.0001, 1.001, 1.01, 1.1\}$ **១. សំណួរគន្លឹះ** តើ $f(x)$មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន កាលណា x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ ។ **២. សម្មតិកម្ម** $f(x)$មានតម្លៃស្មើ5 កាលណា x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ **សម្រាយបញ្ជាក់** 	 ពិនិត្យមើលលើអនុគមន៍លើក្តារខៀន តើ $f(x)$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មានកាលណា x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ ។ $f(x)$ មានតម្លៃស្មើ5 កាលណា x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ ។ -សិស្សឡើងធ្វើបទបង្ហាញលើសម្រាយបញ្ជាក់

-ឱ្យសិស្សតាមក្រុមធ្វើពិសោធផ្ទៀងផ្ទាត់តាមចម្លើយប៉ាន់ស្មាន	• x ខិតជិត1 កាលណា $\|x-1\|$ មានតម្លតូចជាងគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន ។ • ចម្ងាយរវាង $f(x)$ និង 5 អាចតូចបំផុតដែលយើងចង់បានស្របតាមលក្ខខណ្ឌនៃ x ខិតជិត1 ។ ឧបមា x ខិតជិត1 នោះគេបាន $\|x-1\|<0.1 \Rightarrow \|f(x)-5\|<0.2$ $\|x-1\|<0.01 \Rightarrow \|f(x)-5\|<0.02$ $\|x-1\|<0.001 \Rightarrow \|f(x)-5\|<0.002$ តាង 0.2 , 0.02 , 0.002 ដោយ ε គេមាន $\|f(x)-5\| = \|(2x+3)-5\| = 2\|x-1\|$ $\|f(x)-5\|<\varepsilon \Rightarrow 2\|x-1\|<\varepsilon$ $\Rightarrow \|x-1\|<\frac{\varepsilon}{2}$ តាង $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ នោះគេបានគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $\|x-1\|<\delta$ $\Rightarrow \|f(x)-5\|<\delta$ គេថា $f(x)$ ខិតជិត5 កាលណា x ខិតជិត1 **៣. ធ្វើពិសោធ** គេមាន $f(x)=2x+3$ ដោយជំនួសលេខតាមម៉ាស៊ីនគិតលេខ $x\in\{0.9\,,0.99\,,0.999\,,0.9999\}$ $x=0.9\,,\ f(0.9)=4.8$ $x=0.99\,,\ f(0.99)=4.98$ $x=0.999\,,\ f(0.999)=4.998$ $x=0.9999\,,\ f(0.9999)=4.9998$ $x\in\{1.0001\,,1.001\,,1.01\,,1.1\}$	-សិស្សពិភាក្សាតាមក្រុមដោយជំនួសតម្លៃលេខដោយម៉ាស៊ីនគិតលេខ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយប៉ាន់ស្មានរបស់សិស្ស

<table>
<tr>
<td>

-ឱ្យសិស្សបង្ហាញលទ្ធផលការងារ

-ឱ្យសិស្សតាមក្រុមពិភាក្សាទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាន គ្រូជាអ្នកសម្របសម្រួល</td>
<td>$x=1.0001$, $f(1.0001)=5.0002$
$x=1.001$, $f(1.001)=5.002$
$x=1.01$, $f(1.01)=5.02$
$x=1.1$, $f(1.1)=5.2$

តាមតម្លៃលេខ បើ x ខិតជិត1 ឆ្វេង និង 1 ខាងស្តាំ នោះ $f(x)$ ខិតជិត 5 ។

៤. លទ្ធផល
<table>
<tr><td></td><td colspan="4">x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង</td><td colspan="4">x ខិតជិត1 ខាងស្តាំ</td></tr>
<tr><td>x</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.999</td><td>0.9999</td><td>1.0001</td><td>1.001</td><td>1.01</td><td>1.1</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>4.8</td><td>4.98</td><td>4.998</td><td>4.9998</td><td>5.0002</td><td>5.002</td><td>5.02</td><td>5.2</td></tr>
</table>

៥. សន្និដ្ឋាន
អនុគមន៍ $f(x)$ មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន ε មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-1|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។
គេកំណត់សរសេរដោយ $\lim_{x\to a} f(x)=L$</td>
<td>

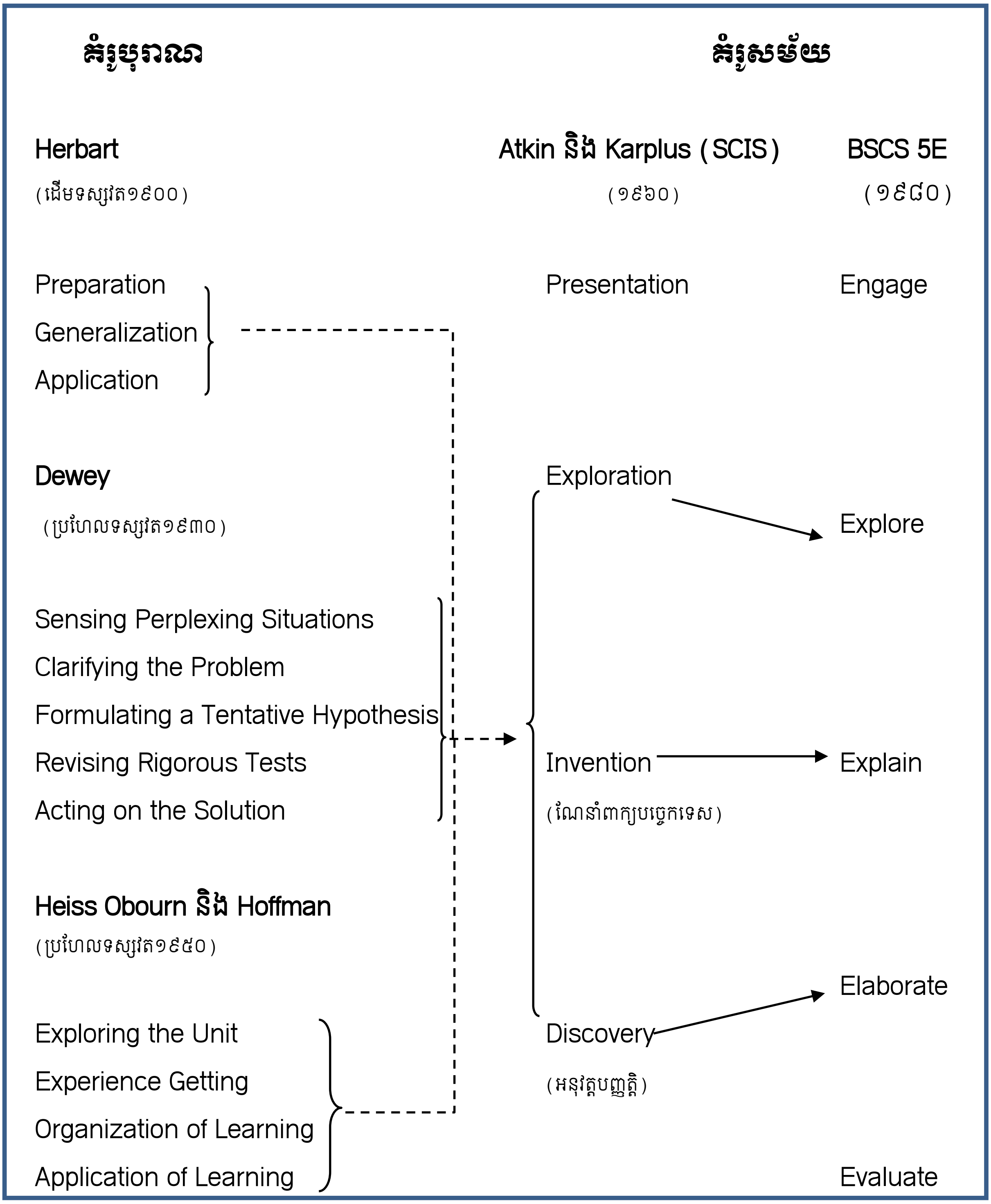
<table>
<tr><td></td><td colspan="4">x ខិតជិត1 ខាងឆ្វេង</td><td colspan="4">x ខិតជិត1 ខាងស្តាំ</td></tr>
<tr><td>x</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.999</td><td>0.9999</td><td>1.0001</td><td>1.001</td><td>1.01</td><td>1.1</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>4.8</td><td>4.98</td><td>4.998</td><td>4.9998</td><td>5.0002</td><td>5.002</td><td>5.02</td><td>5.2</td></tr>
</table>
តាមរយៈពិសោធខាងលើយើងអាចទាញសន្និដ្ឋានបានថា</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី ៤៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (៥នាទី)</td></tr>
<tr>
<td>ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមនេះពិតដោយប្រើនិយមន័ម
$\lim_{x\to 3}(5x-2)=13$</td>
<td>$\lim_{x\to 3}(5x-2)=13$
តាមនិយមន័យ មាន $\varepsilon>0$ នាំឱ្យ $\delta>0$ ដែល $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
ដោយ $|5x-2-13|=|x-3|<\frac{\varepsilon}{5}$
តាង $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ គេបាន $|x-3|<\delta$
នេះបញ្ជាក់ថា មាន $\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$ ដែល $|x-3|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-13|<\varepsilon$</td>
<td>$\lim_{x\to 3}(5x-2)=13$
តាមនិយមន័យ
មាន $\varepsilon>0$ នាំឱ្យ $\delta>0$
ដែល
$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
ដោយ
$|5x-2-13|=|x-3|<\frac{\varepsilon}{5}$
តាង $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ គេបាន $|x-3|<\delta$
នេះបញ្ជាក់ថា មាន $\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$
ដែល $|x-3|<\delta$</td>
</tr>
</table>

		នាំឱ្យ $\lvert f(x)-13\rvert<\varepsilon$
ជំហានទី ៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និង បណ្ដាំផ្ញើ (៥នាទី)		
គ្រូដាក់កិច្ចការផ្ទះឱ្យសិស្សធ្វើ ណែនាំសិស្សឱ្យខិតខំរៀនសូត្រ	លំហាត់ប្រតិបត្តិទំព័រ៤	សិស្សកត់លំហាត់ រួចជំរាបលាគ្រូទៅផ្ទះ

មេរៀនទី ២ ៖ គំរូការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es

២.១. សាវតារ

គំរូនៃការបង្រៀនតាម5Es មិនមែនជាគំរូថ្មីទេ។ ប៉ុន្តែការប្រើប្រាស់ និងការអនុវត្ត5Es បានកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងក្នុងទសវត្សរ៍ចុងក្រោយនេះ។ រូបភាពទី១ បង្ហាញពីការអភិវឌ្ឍនៃគំរូការបង្រៀន និងរៀនតាម5Es។ តារាងខាងក្រោមពន្យល់អំពីគំរូនៃការបង្រៀននីមួយៗ។



រូបទី១: ឫសគល់ និងការអភិវឌ្ឍគំរូនៃការបង្រៀន5E

តារាង១: គំរូបង្រៀន និងរៀនរបស់ Herbart

ដំណាក់កាល	សង្ខេប
Preparation	គ្រូនាំយកបទពិសោធពីមុនរបស់សិស្សឱ្យសិស្សបានដឹង។
Presentation	គ្រូណែនាំបទពិសោធថ្មី និងភ្ជាប់ជាមួយបទពិសោធពីមុន។
Generalization	គ្រូពន្យល់គំនិត និងអភិវឌ្ឍបញ្ញត្តិដល់សិស្ស។
Application	គ្រូផ្តល់បទពិសោធឱ្យសិស្សបង្ហាញ ពីការយល់របស់ពួកគេដោយឱ្យពួកគេអនុវត្តបញ្ញត្តិទាំងនោះទៅក្នុងបរិបទថ្មី។

តារាង២: គំរូបង្រៀន និងរៀនរបស់ Dewey

ដំណាក់កាល	សង្ខេប
Sensing Perplexing Situations	គ្រូបង្ហាញបទពិសោធដែលធ្វើឱ្យសិស្សឈប់ធ្វើអ្វីផ្សេង និងមកចាប់អារម្មណ៍ពីបញ្ហា។
Clarifying the Problem	គ្រូធ្វើឱ្យសិស្សកំណត់ និងបង្កើតបញ្ហា។
Formulating a Tentative Hypothesis	គ្រូផ្តល់ឱកាសឱ្យសិស្សបង្កើតសម្មតិកម្ម និងព្យាយាមបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាងអ្វីដែលកំពុងភ័ន្តច្រឡំ និងបទពិសោធពីមុន។
Testing the Hypothesis	គ្រូអនុញ្ញាតឱ្យសិស្សសាកល្បងធ្វើពិសោធន៍ផ្សេងៗ (ការគិតស្រមៃ គូសវាសលើក្រដាស ឬពិសោធ) ដើម្បីតេស្តសម្មតិកម្ម។
Reviewing Rigorous Tests	គ្រូផ្តល់យោបល់លើតេស្តដែលមានលទ្ធផលអាចទទួលយក ឬបដិសេធសម្មតិកម្ម។
Acting on the Solution	គ្រូឱ្យសិស្សបង្កើតជាអំណះអំណាងមួយដែលបង្ហាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាន និងបង្ហាញនូវវិធានការផ្សេងៗដែលអាចធ្វើបាន។

តារាង៣: គំរូបង្រៀន និងរៀនរបស់ Heiss Obourn និង Haffman

ដំណាក់កាល	សង្ខេប
Exploring the Unit	សិស្សសង្កេតការបង្ហាញ និងលើកជាសំណួរឡើង ស្នើសម្មតិកម្មដើម្បីឆ្លើយសំណួរដែលបានលើកឡើង និងរៀបចំផែនការសម្រាប់តេស្តសម្មតិកម្ម។
Experience Getting	សិស្សតេស្តសម្មតិកម្ម ប្រមូល បកស្រាយទិន្នន័យ និងបង្កើតសេចក្តីសន្និដ្ឋាន។
Organization of Learning	សិស្សបង្កើតគ្រោង លទ្ធផល និងសេចក្តីសង្ខេប។ ពួកគេធ្វើការប្រឡង។
Application of Learning	សិស្សអនុវត្តព័ត៌មាន បញ្ញត្តិ និងបំណិនទៅក្នុងស្ថានភាពថ្មី។

តារាង៤: គំរូបង្រៀននិងរៀនរបស់ Atkin-Karplus (SCIS Model: Science Curriculum Improvement Study)

ដំណាក់កាល	សង្ខេប
Exploration	សិស្សមានបទពិសោធដំបូងជាមួយបាតុភូត។
Invention	សិស្សត្រូវបានណែនាំពីពាក្យបច្ចេកទេស ឬពាក្យគន្លឹះថ្មីទាក់ទងជាមួយនឹងបញ្ញត្តិដែលជាកម្មបទនៃការសិក្សា។
Discovery	សិស្សអនុវត្តបញ្ញត្តិ និងប្រើប្រាស់ពាក្យបច្ចេកទេស ឬពាក្យគន្លឹះដែលពាក់ព័ន្ធ ប៉ុន្តែក្នុងស្ថានភាពថ្មី។

នៅពាក់កណ្ដាលទសវត្សរ៍១៩៨០ BSCS បានទទួលថវិកាពីIBM ដើម្បីធ្វើការសិក្សាទៅកម្មវិធីសិក្សាថ្មីសម្រាប់មុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ និងសុខភាពនៅកម្រិតបឋមសិក្សា។ តាមរយៈការសិក្សានេះ BSCS 5Es Model (BSCS 5Es Model : Biological Sciences Curriculum Study) ឬហៅកាត់ថា5Es ត្រូវបានបង្កើតឡើង ដោយអភិវឌ្ឍចេញពី SCIS Model។ នៅក្នុងវដ្តនៃការបង្រៀន និងរៀន5Es មានដំណាក់កាល ចូលរួម(Engage), រុករក(Explore), ពន្យល់(Explain), ពន្យល់ស៊ីជម្រៅដើម្បីទាញរកភាពទូទៅ(Elaborate) និង វាយតម្លៃ (Evaluate)។

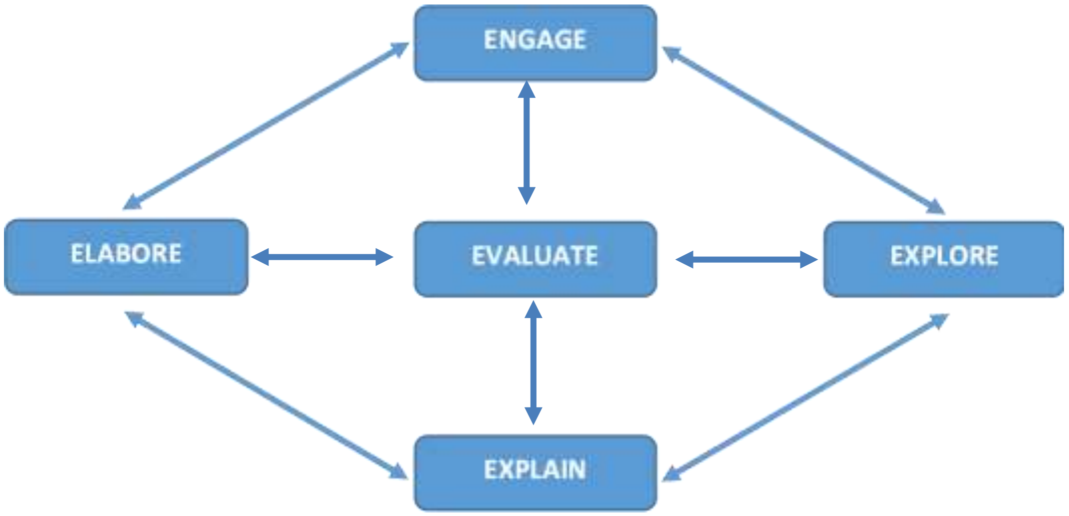
តារាង៥: ការប្រៀបធៀបរវាងគំរូបង្រៀន និងរៀនរបស់ SCIS និង BSCS 5E

គំរូបង្រៀននិងរៀនរបស់ SCIS	**គំរូការបង្រៀននិងរៀនតាម** 5E
	Engage (ដំណាក់កាលថ្មី)
Exploration	Explore (កែសម្រួលពីSCIS)
Invention (ណែនាំពាក្យបច្ចេកទេស)	Explain (កែសម្រួលពីSCIS)
Discovery **(អនុវត្តបញ្ញត្តិ)**	Elaborate (កែសម្រួលពីSCIS)
	Evaluate (ដំណាក់កាលថ្មី)

២.២. ដំណាក់កាលនៃគំរូបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es

5Es ជាលំនាំ(គំរូ)នៃការបង្រៀនដែលឈរលើទ្រឹស្ដីស្ថាបនានិយម(constructivist) បានចែងថាអ្នករៀនបង្កើតគំនិតថ្មីដោយឈរលើគំនិតចាស់ពួកគេ។ វាជាការរៀន ដោយផ្ដោតលើគោលការណ៍ស្ថាបនានិយម និងសង្កត់ធ្ងន់លើការពន្យល់ អង្កេតបាតុភូត និងការប្រើប្រាស់ភស្តុតាងដើម្បីធ្វើសេចក្ដីសន្និដ្ឋាន។ 5Es អាចប្រើប្រាស់សម្រាប់សិស្សគ្រប់កម្រិត។ វាអាចប្រើដើម្បីបង្កើតមេរៀនគណិតវិទ្យា និងល្អបំផុតសម្រាប់ការបង្រៀនគណិតវិទ្យា។

5Es គឺជាគំរូនៃការបង្រៀនល្អបំផុតសម្រាប់ការបង្រៀនគណិតវិទ្យា និង មានវដ្តនៃការបង្រៀនដូចខាងក្រោម៖



រូបទី២: វដ្តនៃការបង្រៀនតាម 5Es

លោក Bybee (1997) បានចាត់ទុកថាការប្រើប្រាស់គំរូបង្រៀននេះសិស្សត្រូវៈ កំណត់ឡើងវិញ រៀបចំឡើងវិញ បង្ហាញ និងផ្លាស់ប្តូរបញ្ញត្តិដើមពួកគេ តាមរយៈការឆ្លុះបញ្ចាំងខ្លួនឯង និងអន្តរកម្មជាមួយដៃគូរគេ និងមជ្ឈដ្ឋានគេ។ អ្នកសិក្សាបកស្រាយបញ្ហា និងបញ្ចូលបំណកស្រាយទាំងនោះទៅក្នុងការយល់ឃើញរបស់ពួកគេ។ គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា និងអ្នកអភិវឌ្ឍកម្មវិធីសិក្សាគណិតវិទ្យាអាចបញ្ចូល និងអនុវត្តគំរូ5Es ទៅតាមកម្រិតថ្នាក់ផ្សេងៗគ្នា។ គំរូអាចជាទម្រង់តាមលំដាប់លំដោយនៃជំហានមេរៀនប្រចាំថ្ងៃ មេរៀននីមួយៗ ឬផែនការប្រចាំឆ្នាំ (Bybee, 1997)។ ដំណាក់កាលនីមួយៗនៃការបង្រៀនតាម5Es ត្រូវកែប្រែពី Bybee ទៅជាៈ

ក. ចូលរួម (ENGAGE)

ចូលរួម(Engage) មានន័យថាបញ្ចុះបញ្ចូលសិស្សអោយចូលរួមសិក្សា។ គ្រូត្រូវធ្វើសកម្មភាពយ៉ាងណាដើម្បីឱ្យសិស្សចាប់ផ្តើមចូលរួមជាមួយការបង្រៀន។ **វាជាដំណាក់កាលដែលជំរុញការគិតដោយផ្តោតអារម្មណ៍ទៅលើបញ្ញត្តិមួយ**។ ក្នុងដំណាក់កាលនេះ គ្រូត្រូវព្យាយាមវាយតម្លៃចំណេះដឹងមានស្រាប់របស់សិស្ស និងកំណត់ការយល់បញ្ញត្តិខុស (misconception) របស់សិស្ស។ វាជាដំណាក់កាលសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលដែលគ្រូត្រូវជំរុញ ឬបង្កលក្ខណៈឱ្យសិស្សចង់រៀនអំពីប្រធានបទដែលនឹងត្រូវរៀនបន្ថែមលើប្រធានបទដែលនឹងត្រូវរៀនបន្តិចទៀត។ សិស្សអាចធ្វើព្យុះគំនិតលើសំណួរបើក ឬសួរខ្លួនឯងៈ "តើខ្ញុំបានចេះឬដឹងអ្វីខ្លះ អំពីប្រធានបទនេះ?" ការប្រៀបធៀបព្រឹត្តិការណ៍ ការបង្ហាញបាតុភូត ឬព្រឹត្តិការណ៍ ការសង្កេតលើការបង្ហាញរបស់គ្រូ ការសួរសំណួរ ឬការប្រើប្រាស់តារាង ក្រាប ដ្យាក្រាម រូបភាព ឬ ចំណេះដឹង (KWL) ជាដើម អាចត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីទាញចំណាប់អារម្មណ៍ ឬបង្កើតការចង់ដឹង។ KWL ធ្វើឱ្យសិស្សធ្វើព្យុះគំនិត និងរក្សាទុកនូវអ្វីដែលពួកគេដឹង ចង់ដឹង និងចុងក្រោយអ្វីដែលពួកគេបានរៀនប្រធានបទ។ KWL ត្រូវបានប្រើដើម្បីវាយតម្លៃចំណេះដឹងមានស្រាប់របស់សិស្សជាមុន និងជារឿយៗប្រើពេញមួយម៉ោងបង្រៀន។ ក្នុងដំណាក់កាលនេះ វាមិនមែនសម្រាប់ឧទ្ទេស កំណត់ពាក្យគន្លឹះ (ឬពាក្យបច្ចេកទេស) ផ្តល់សេចក្តីពន្យល់ ឬកត់ត្រានិយមន័យទេ។

ខ. រុករក (EXPLORE)

វាជាដំណាក់កាលរុករកដែលផ្តល់ឱ្យសិស្សនូវ បទពិសោធរៀនស្វែងយល់ ឲ្យបានទូលំទូលាយ និងច្បាស់លាស់។ វាក៏ជាដំណាក់កាលសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលផងដែរ ដែលធ្វើយ៉ាងណាឱ្យសិស្សសកម្មក្នុងការរុករក។ សិស្សត្រូវបានលើកទឹកចិត្តឱ្យប្រើបំណិនមានស្រាប់របស់ខ្លួនដូចជាការសង្កេត ការសួរសំណួរ ការអង្កេត ការតេស្ត ការព្យាករណ៍ ការបង្កើតសម្មតិកម្ម និងការទំនាក់ទំនងជាមួយដៃគូ។ ក្នុងដំណាក់កាលនេះ ការរៀនមានទំនោរទៅលើសកម្មភាព ឬបទពិសោធបែបរិះរកដែលលើកទឹកចិត្តសិស្សឱ្យអភិវឌ្ឍបំណិន និងបញ្ញត្តិ។ តួនាទីគ្រូជាអ្នកសម្របសម្រួល ឬជាអ្នកប្រឹក្សា។ បន្ថែមលើនេះ សិស្សត្រូវបានលើកទឹកចិត្តឱ្យធ្វើការក្នុងបរិយាកាសសហការគ្នាដោយគ្មានការណែនាំដោយផ្ទាល់ពីគ្រូបង្រៀនទេ។ ដំណាក់កាលនេះមានលក្ខណៈពិសេសដោយឡែកផងដែរ ពីព្រោះសិស្សត្រូវបានផ្តល់នូវបទពិសោធ ធ្វើដោយផ្ទាល់ មុនពេលសេចក្តីពន្យល់ផ្លូវការរបស់ពាក្យគន្លឹះ បច្ចេកទេស និយមន័យ ឬបញ្ញត្តិត្រូវបានពិភាក្សា ឬពន្យល់ដោយគ្រូ។

គ. ពន្យល់ (EXPLAIN)

វាជាដំណាក់បើកការគិត minds-on និង ជាដំណាក់កាលគ្រូមជ្ឈមណ្ឌលនៅក្នុង5E ដែលមានការចង្អុលបង្ហាញណែនាំច្រើនពីគ្រូ និងបទពិសោធខាងដើមរបស់សិស្សក្នុងដំណាក់កាល រុករក (Explore)។ ដំណាក់កាលនេះធ្វើឱ្យសិស្សអាចបរិយាយទៅលើអ្វីដែលពួកគេយល់ និងលើកសំណួរឡើងអំពីបញ្ញត្តិដែលពួកគេបាន និង

កំពុងរុករក។ **វាទាក់ទងនឹងសំណួរថ្មីៗដែលត្រូវបានបង្កើតឡើង។** ដំណាក់កាលពន្យល់(Explain) ជាដំណាក់កាលសំខាន់មួយដែលជាផ្នែកបើកការគិតនៃ5E។ មុនពេលគ្រូផ្តល់នូវសេចក្តីពន្យល់ណាមួយ សិស្សត្រូវមានឱកាសបង្ហាញពីការយល់ឃើញ និងការគិតពួកគេ។ ដូច្នេះផ្នែកដំបូងនៃដំណាក់កាលពន្យល់(Explain) វាជាពេលវេលាដែល**គ្រូដើរតួនាទីជាអ្នកសម្របសម្រួលម្នាក់ និងស្នើសិស្សឱ្យបរិយាយ និងពិភាក្សាការលើអ្វីដែលពួកគេបានរុករកឃើញ។** បន្ទាប់ពីសិស្សបានឱកាសដើម្បីចែករំលែកការយល់ឃើញពួកគេរួចហើយ គ្រូណែនាំបង្ហាញព័ត៌មានដែលមានលក្ខណវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកទេសដោយផ្ទាល់។ ដំណាក់កាលនេះត្រូវបញ្ជាក់អំពីការយល់បញ្ញត្តិខុសរបស់សិស្សដែលរកឃើញក្នុងដំណាក់កាល Engage និង Explore។ គ្រូត្រូវផ្តល់ឱ្យសិស្សនូវនិយមន័យ កំណត់សម្គាល់ និងឈ្មោះផ្លូវការ។ គ្រូប្រហែលត្រូវបញ្ចូលខ្សែវីដេអូខ្លី កម្មវិធីកុំព្យូទ័រ ឬសម្ភារៈជំនួយផ្សេងៗដើម្បីជួយឱ្យងាយយល់។ បន្ទាប់មកសិស្សអាចពន្យល់បញ្ញត្តិសំខាន់ៗបានច្បាស់លាស់ទៅគ្រូ និងដៃគូរពួកគេ។

ឃ. បញ្ជាក់លម្អិត (ELABORATE)

សកម្មភាពក្នុងដំណាក់កាលនេះគួរលើកទឹកចិត្តឱ្យសិស្សអនុវត្តបញ្ញត្តិដែលទើបបានយល់ថ្មីៗ ព្រមទាំងពង្រឹងបំណិនថ្មីបន្ថែមទៀត។ សិស្សត្រូវបានលើកទឹកចិត្តឱ្យពិនិត្យអ្វីដែលពួកគេទើបតែយល់ដឹងជាមួយដៃគូឱ្យបង្កើតពិសោធន៍ គំរូថ្មីដោយឈរលើបំណិន ឬបង្កើតបញ្ញត្តិថ្មី។ **គោលបំណងនៃដំណាក់កាលនេះគឺ ដើម្បីជួយយល់បញ្ញត្តិកាន់តែស៊ីជម្រៅ និងទូលំទូលាយ។** សិស្សអាចសង្កេតបន្ថែម អភិវឌ្ឍផលិតផល ចែករំលែកព័ត៌មាន និងគំនិត ឬអនុវត្តចំណេះដឹង និងបំណិនពួកគេទៅក្នុងផ្នែកផ្សេងៗ។ នេះជាឱកាសដ៏សំខាន់ដើម្បីបញ្ចូលបច្ចេកវិទ្យាជាមួយនឹងខ្លឹមសារមេរៀនផ្សេងៗនៃគណិតវិទ្យា។ សកម្មភាព Elaborate អាចបង្ហាញពីការគូសក្រាបលើកម្មវិធីsoftwareមួយចំនួនដើម្បីបញ្ជាក់បន្ថែមពីបំរែបំរួលរបស់អនុគមន៍ជាដើម។

ង. វាយតម្លៃ (EVALUATE)

វាយតម្លៃនៅក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាមបែប 5E មានភាពខុសគ្នាយ៉ាងខ្លាំងពីការបង្រៀនតាមបែបបូរាណ។ ការវាយតម្លៃទាំងផ្លូវការ និងមិនផ្លូវការ គួរតែត្រូវមាន និងសមស្របក្នុងដំណើរការបង្រៀននីមួយៗ។ **ការវាយតម្លៃកើតឡើងបន្តរហូតពេញ១ម៉ោងសិក្សាដោយគ្រូតាមដានយ៉ាងជាប់លាប់ ទៅលើការរៀនរបស់សិស្សនៅពេលសិស្សអនុវត្តបញ្ញត្តិ និងបំណិនថ្មីៗ និងស្វែងរកភស្តុតាងផ្សេងៗពេលដែលសិស្សផ្លាស់ប្តូរ ឬកែប្រែការគិតរបស់ពួកគេ។** សិស្សក៏អាចមានឱកាសធ្វើការវាយតម្លៃខ្លួនឯងផងដែរ តែទោះយ៉ាងណា **ការវាយតម្លៃក៏អាចរាប់បញ្ចូលការវាយតម្លៃសរុបដូចជា ប្រឡងខ្លី ប្រឡង ឬការងារស្រាវជ្រាវ។**

បើទោះជា5Es ត្រូវបានពន្យល់តាមលំដាប់លំដោយ ប៉ុន្តែនៅក្នុងការបង្រៀនវាអាចមានការ ត្រឡប់ទៅវិញទៅមកច្រើនដងរវាងដំណាក់កាលនីមួយៗ។ ជាញឹកញាប់ក្នុងការបង្រៀនការត្រឡប់ទៅមករវាង Explore និង Explain អាចកើតឡើងច្រើនដងមុនពេលសិស្សអាចបន្តទៅដំណាក់កាល Elaborate។ គ្រូអាចទៅមុខទៅក្រោយពីរបីដងក្នុង 5Es ឬពេលខ្លះត្រូវបន្ថែម Engage ម្តងទៀតមុនពេលចូលទៅ Elaborate ។ វាមានភាពបទបែន និងថាមវន្ត(Dynamics)។ វាមិនចាំបាច់ត្រូវតែបញ្ចប់១វដ្ត 5Es ក្នុង១ម៉ោងសិក្សានោះទេ វាក៏អាចប្រើពេលច្រើនថ្ងៃដើម្បីបញ្ចប់មេរៀន។ វដ្តនៃការបង្រៀន និងរៀនបង្កើតឡើងដើម្បីឱ្យមានការផ្លាស់ប្តូរបន្តិចម្តងៗ និងចូលរួមចំណែកក្នុងការធ្វើ ឱ្យមានសង្គតិភាព និងទំនាក់ទំនងគ្នា (Bybee, 1997)។

២.៣. សកម្មភាពគ្រូ និងសិស្សក្នុងការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es

ខាងក្រោមនេះជាអ្វីដែលគ្រូត្រូវធ្វើនៅក្នុងគំរូនៃការបង្រៀន និងរៀនតាម5Es

ដំណាក់កាល	ស្របតាមគំរូនៃការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es	មិនស្របតាមគំរូនៃការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es
Engage	• បង្កើតចំណាប់អារម្មណ៍ • បង្កើតការចង់ដឹង • លើកជាសំណួរ • រកឃើញអ្វីដែលសិស្សដឹង ឬគិតអំពីបញ្ញត្តិ/ប្រធានបទ	• ពន្យល់បញ្ញត្តិ • ផ្តល់និយមន័យ និងចម្លើយ • ធ្វើសេចក្តីសន្និដ្ឋាន • Provides closure • ឧទ្ទេស
Explore	• លើកទឹកចិត្តឱ្យសិស្សធ្វើការជាមួយគ្នាដោយគ្មានការណែនាំផ្ទាល់ពីគ្រូ • សង្កេត និងស្តាប់សិស្ស ពេលសិស្សមាន អន្តរកម្មនឹងគ្នា • សួរសំណួរបំផុសដែលបង្វែរការសង្កេតរបស់ សិស្សពេលចាំបាច់ • ទុកពេលឱ្យសិស្សភ័ន្តច្រឡំលើបញ្ហា • ដើរតួជាអ្នកប្រឹក្សារបស់សិស្ស	• ឱ្យចម្លើយ • ប្រាប់ ឬពន្យល់ពីរបៀបធ្វើការក្នុងបញ្ហា • Provide closure • ប្រាប់សិស្សថាគេខុស • ផ្តល់ព័តមាន ឬការពិតដែលដោះស្រាយបញ្ហាបាន • ដឹកនាំសិស្សម្តងមួយជំហានៗទៅរកដំណោះស្រាយ
Explain	• លើកទឹកចិត្តសិស្សឱ្យពន្យល់បញ្ញត្តិនិងនិយមន័យដោយពាក្យពេចន៍ពួកគេផ្ទាល់ • សួររកហេតុផល ឬភស្តុតាង និងអំណះអំណាងផ្សេងៗពីសិស្ស • ចុងក្រោយផ្តល់និយមន័យ សេចក្តីពន្យល់និងឈ្មោះថ្មី • ប្រើបទពិសោធចាស់របស់សិស្សជាមូលដ្ឋានសម្រាប់ការពន្យល់បញ្ញត្តិ	• ទទួលយកការពន្យល់ដែលគ្មានហេតុផល • មិនយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការទាមទារឱ្យសិស្សពន្យល់ • ណែនាំបញ្ញត្តិ ឬបំណិនដែលមិនទាក់ទង
Elaborate	• រំពឹងថាសិស្សប្រើឈ្មោះ និយមន័យ និងសេចក្តីពន្យល់ផ្លូវការដែលបានផ្តល់ឱ្យពីមុន • លើកទឹកចិត្តឱ្យសិស្សអនុវត្ត ឬពង្រីកបញ្ញត្តិ និងបំណិននៅក្នុងស្ថានភាពថ្មី • រំឭកសិស្សអំពីសេចក្តីពន្យល់ផ្សេងទៀត • ឱ្យសិស្សប្រើទិន្នន័យ និងភស្តុតាងដែលមានស្រាប់ និងសួរសិស្សដូចជា	• ផ្តល់ចម្លើយច្បាស់លាស់ • ប្រាប់សិស្សថាពួកគេខុស • ឧទ្ទេស • ដឹកនាំសិស្សម្តងមួយជំហានៗទៅរកដំណោះស្រាយ • ពន្យល់ពីរបៀបធ្វើការក្នុងបញ្ហា

	- តើអ្វីដែលប្អូនបានដឹងរួចហើយ? - ហេតុអ្វីបានជាអ្នកគិតថា...? (យុទ្ធសាស្ត្រនៅក្នុងដំណាក់កាល Explore អាចអនុវត្តនៅកន្លែងនេះផងដែរ)	
Evaluate	• សង្កេតសិស្សពេលពួកគេអនុវត្តបញ្ញត្តិ និង បំណិនថ្មី • វាយតម្លៃចំណេះដឹង និង/ឬបំណិនរបស់សិស្ស • ស្វែងរកភស្តុតាងដែលសិស្សបានផ្លាស់ប្តូរការគិត ឬឥរិយាបថពួកគេ • ឱ្យសិស្សវាយតម្លៃការរៀន និងបំណិនរបស់ខ្លួនឯង • សួរសំណួរបើកដូចជា - ហេតុអ្វីបានជាប្អូនគិតថា...? - តើប្អូនមានភស្តុតាងអ្វី? - តើប្អូនដឹងអ្វីខ្លះអំពី...? - តើប្អូនពន្យល់... យ៉ាងដូចម្តេច?	• តេស្តវាក្យសព្ទ ពាក្យបច្ចេកទេស /ពាក្យគន្លឹះ និងការពិត • ណែនាំគំនិត ឬបញ្ញត្តិថ្មី • បង្កើតភាពមិនច្បាស់លាស់ • បង្កើតការពិភាក្សាចំហដែលមិនទាក់ទងនឹងបញ្ញត្តិ ឬបំណិនក្នុងមេរៀន

ខាងក្រោមនេះជាអ្វីដែលសិស្សត្រូវធ្វើនៅក្នុងគំរូនៃការបង្រៀន និងរៀនតាម5Es

ដំណាក់កាល	ស្របតាមគំរូនៃការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es	មិនស្របតាមគំរូនៃការបង្រៀន និងរៀនតាម 5Es
Engage	• សួរសំណួរដូចជា៖ - ហេតុអ្វីបានជាវាកើតឡើងបែបហ្នឹង? - តើខ្ញុំដឹងអ្វីខ្លះហើយអំពី...? - តើខ្ញុំអាចរកឃើញអ្វីអំពី...? • បង្ហាញចំណាប់អារម្មណ៍ទៅលើប្រធានបទ	• សួររកចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ • ផ្តល់ចម្លើយត្រឹមត្រូវ • ចង់តែបានចម្លើយ ឬការពន្យល់ • រកដំណោះស្រាយតែមួយ
Explore	• គិតដោយសេរី ប៉ុន្តែស្ថិតនៅក្នុងដែនកំណត់នៃសកម្មភាព • តេស្តលើការទស្សន៍ទាយ និងសម្មតិកម្ម • បង្កើតការទស្សន៍ទាយ និងសម្មតិកម្មថ្មី • សាកល្បងជម្រើសផ្សេងទៀត និងពិភាក្សាអំពីពួកវាជាមួយអ្នកផ្សេង	• ឱ្យអ្នកដទៃគិត និងរុករក (មិនសកម្មក្នុងការចូលរួម) • ធ្វើការដោយស្ងៀមស្ងាត់ម្នាក់ឯង ដោយមិនសូវមានអន្តរកម្មជាមួយអ្នកដទៃ • លេងច្រើន មិនយកចិត្តទុកដាក់ និងគ្មានគោលដៅ

	• កត់ត្រាអ្វីដែលសង្កេតឃើញ និងគំនិតព្យួរការវិនិច្ឆ័យសិន	• ឈប់រុករកពេលរកបានដំណោះស្រាយមួយហើយ
Explain	• ពន្យល់ពីដំណោះស្រាយ ឬចម្លើយដែលអាចទៅរួចដល់អ្នកដទៃ • ស្តាប់ការពន្យល់របស់អ្នកដទៃយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ • ចោតជាសំណួរទៅលើការពន្យល់របស់អ្នកដទៃ • ស្តាប់ និង ព្យាយាមយល់ការពន្យល់ដែលគ្រូផ្តល់ឱ្យ • ពិនិត្យការពន្យល់ខាងដើម និងអាចកែប្រែដើម្បីឆ្លុះបញ្ចាំងការយល់ថ្មី • យោងទៅសកម្មភាពមុន • ប្រើអ្វីដែលកត់ត្រាបានពីការសង្កេតមកពន្យល់	• យកការពន្យល់ដែលមិនដឹងមកពីណា គ្មានទំនាក់ទំនងជាមួយបទពិសោធចាស់ៗ • នាំយកបទពិសោធ និងឧទាហរណ៍ដែលមិនពាក់ព័ន្ធ • ទទួលយកការពន្យល់ដែលគ្មានហេតុផល • មិនចូលរួមក្នុងការពន្យល់ដែលអាចជឿទុកចិត្តបានពីអ្នកដទៃ
Elaborate	• អនុវត្តឈ្មោះ និយមន័យ ការពន្យល់និងបំណិនថ្មី ប៉ុន្តែនៅក្នុងស្ថានភាពស្រដៀង គ្នា • ប្រើព័ត៌មានចាស់ដើម្បីសួរសំណួរ ស្នើជាដំណោះស្រាយ និងធ្វើការសម្រេចចិត្ត • ធ្វើសេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលសមហេតុផលចេញពីភស្តុតាងដែលមាន • កត់ត្រាការសង្កេត និងការពន្យល់ត្រួតពិនិត្យការយល់របស់ខ្លួនជាមួយមិត្តភក្តិ ឬដៃគូ	• លេងច្រើន មិនយកចិត្តទុកដាក់ និងគ្មានគោលដៅ • មិនប្រើព័តមានឬភស្តុតាងចាស់ៗ (ពីមុន) • ធ្វើសេចក្តីសន្និដ្ឋាន មិនដឹងចេញមកពីណា ប្រើតែឈ្មោះដែលគ្រូបានឱ្យក្នុងការពិភាក្សា
Evaluate	• ឆ្លើយសំណួរបើកដោយប្រើការសង្កេត ភស្តុតាង និង ការពន្យល់ដែលព្រមទទួលយកពីមុន • បង្ហាញឱ្យឃើញថាយល់ ឬចេះបញ្ញត្តិ ឬមានបំណិន • វាយតម្លៃលើការអភិវឌ្ឍ និងចំណេះដឹងរបស់ខ្លួន • សួរសំណួរដែលទាក់ទងដែលអាចឈានទៅ រកការសង្កេតនៅពេលខាងមុខ	• ធ្វើសេចក្តីសន្និដ្ឋានដោយមិនប្រើការសង្កេតភស្តុតាង និងការពន្យល់ដែលព្រមទទួលយកពីមុន • ផ្តល់តែចម្លើយ បាទ/ចាស ឬទេ និងជានិយមន័យ ឬការពន្យល់ដែលបានចាំតែប៉ុណ្ណោះ • មិនអាចផ្តល់ការពន្យល់ដែលអាចទទួលយកបានដោយប្រើពាក្យពេចន៍របស់ខ្លួនលើកឡើងប្រធានបទថ្មីដែលមិពាក់ព័ន្ធ

២.៤. ការសរសេរកិច្ចតែងការបង្រៀនគណិតវិទ្យាផ្អែកលើគំរូ 5E

ក្រៅពីគំរូជាច្រើននៃការបង្រៀនក្រោមវិធីសាស្រ្តស្ថាបនា 5Es គឺជាគំរូមួយក្នុងចំណោមគំរូដែលមានប្រជាប្រិយបំផុតនិងត្រូវបានគេទទួលស្គាល់ទូទាំងពិភពលោក (NASAឆ្នាំ ២០១៣)។ គំរូនៃការបង្រៀននេះមាន ៥ជំហានដូចខាងក្រោម៖

ក. ចូលរួម (Engage)៖សិស្សចូលរួមនៅក្នុងមេរៀនដោយសួរសំណួរពី ការធ្វើបទបង្ហាញ ការសង្កេត និងការបង្កើតការប៉ាន់ស្មានជាដើម។

ខ. រុករក(Explore)៖ សិស្សពិភាក្សាជាមួយមិត្តភក្តិពី ការធ្វើបទបង្ហាញ ការសង្កេត និងការប៉ាន់ស្មានផ្សេងៗជាដើម។

គ. ពន្យល់(Explain)៖ សិស្សពន្យល់ពីគោលគំនិតខ្លឹមសារមេរៀនដោយផ្អែកលើការសួរសំនួររិះរករបស់គ្រូ។

ឃ.បញ្ជាក់លម្អិត(Elaborate)៖ សិស្សបង្ហាញអំពីភាពត្រឹមត្រូវដែលពួកគេបានរកឃើញ ដោយមានការពន្យល់បន្ថែមរបស់គេ ព្រមទាំងគ្រូជួយបំពេញបន្ថែមរវាងគំនិតចាស់ និងថ្មីរបស់សិស្ស។

ង.វាយតម្លៃ (Evaluate)៖ គ្រូវាយតម្លៃក្រៅផ្លូវការដល់សិស្សដោយសួរសំណួរ និងពិនិត្យមើលការងាររបស់ពួកគេ។

ទម្រង់កិច្ចតែងការបង្រៀន

ម៉ោង	ជំហាន	សកម្មភាពគ្រូ	សកម្មភាពសិស្ស	TLM
	ចូលរួម	ត្រូវចងចាំនូវផែនទីគំនិតនៃមេរៀននិងសួរសិស្សឱ្យកំណត់អត្តសញ្ញាណ និងកត់សម្គាល់នូវអ្វីដែលពួកគេបានរកឃើញ បានឃើញ និងបានអង្កេត នៅក្នុងឃ្លីបវីដេអូ រូបភាព និងការធ្វើបទបង្ហាញ។		
	រុករក		សិស្សត្រូវកត់ត្រាទុកនូវការរកឃើញរបស់ពួកគេ ឬ ការសង្កេត	
	ពន្យល់	ដើរសាកសួរសិស្សតាមក្រុម នូវការរកឃើញ ឬការសង្កេតរបស់ពួកគេ	- ពិភាក្សាក្នុងក្រុម ឬគ្រូ - ពន្យល់អំពីការរកឃើញឬការសង្កេតរបស់ពួកគេ	
	បញ្ជាក់លម្អិត	ធ្វើអន្តរកម្មជាមួយសិស្សដើម្បីកែលម្អការរកឃើញ ឬការសង្កេតរបស់គេ ឲ្យភ្ជាប់ទៅនឹងខ្លឹមសារមេរៀនប្រចាំថ្ងៃ ដោយគ្រូអាចនឹងផ្តល់នូវព័ត៌មានពាក់	កែតម្រូវ ឬអះអាងពីបញ្ញាតរបស់ខ្លួនអោយស្របទៅនឹងបញ្ញាតថ្មីប្រចាំថ្ងៃ	

		ព័ន្ធបន្ថែម។		
	វាយតម្លៃ	ចម្លើយសិស្ស ដំណោះស្រាយ ឬ ការងារសិក្សាត្រូវបានវាយតម្លៃ	ដោះស្រាយបញ្ហា	

- **ជំហានបញ្ជាក់លម្អិត និងវាយតម្លៃ** អាចបន្តរហូតដល់បញ្ចប់ការដោះស្រាយលំហាត់ ដែលដោយប្រើបញ្ហាតដូចគ្នាក្នុងរយៈពេលច្រើនជាងមួយម៉ោងសិក្សា។
- **ពេលវេលា៖** រយៈពេលអតិបរមាត្រូវបានបញ្ជាក់ និង អាចប្រែប្រួលអាស្រ័យលើតម្រូវការជាក់ស្តែង។

❖ **កិច្ចការផ្ទះ** ៖ (ផ្តល់លំហាត់មួយចំនួនដែលពឹងផ្អែកលើបញ្ហាតដែលបានពិភាក្សា)។

❖ **ការបិទ / ការឆ្លុះបញ្ចាំង** ៖ (ពណ៌នាពីរបៀបដែលអ្នកនឹងនាំមេរៀនរបស់អ្នកអោយបញ្ចប់ដ៏មានអត្ថន័យ ដែលអាចសង្ខេបមេរៀន និងផ្តល់នូវព័ត៌មានអំពីអ្វីដែលសិស្សបានរៀន និងត្រូវករៀននាពេលអនាគត ហើយក៏អាចបញ្ជាក់ផងដែរ អំពីតម្រូវការផ្លាស់ប្តូរចាំបាច់មួយចំនួនសម្រាប់ការកែលម្អលើការសិក្សាបញ្ហាតក្នុងថ្នាក់រៀន)។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី១

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃចន្ទ ១២កើត ខែអស្សុច ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤ ត្រូវនឹងថ្ងៃទី២១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១០ (ភាគ១)

ជំពូក១ ៖ តក្កវិទ្យា សំណុំ និងចំនួន

មេរៀនទី២ ៖ សំណុំ

២.១. សញ្ញាណនៃសំណុំ

ក. សំណុំកំណត់តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ

រយៈពេល ៖ ៤៥នាទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបញ្ចប់ខ្លឹមសារនៃមេរៀននេះ

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សប្រាប់សញ្ញាណសំណុំ បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សសរសេរសំណុំតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ និងលក្ខណៈរួមនៃធាតុ បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សមានសាមគ្គីភាពក្នុងក្រុម និងពិភាក្សាដោះស្រាយបញ្ហា។

II. **សម្ភារឧបទេស**

-សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ១៦-១៨

-ហ្វឺត និងបន្ទាត់

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមលំនាំគំរូ5E

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន (២នាទី)		
-គ្រូពិនិត្យវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្ដាប់ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់រៀន		-រៀបចំសណ្ដាប់ធ្នាប់
ជំហានទី២៖ រំលឹកមេរៀន (៦នាទី)		
-ចូរប្អូនសរសេរចំនួនគត់ -ចូររកចំនួនគត់ដែលជាតួចែកនៃ 12។ -ចូររកចំនួនគត់ដែលជាពហុគុណនៃ 5ហើយតូចជាង 30 ។	-ចំនួនគត់ -តួចែក -ពហុគុណ	-ចំនួនគត់ $\{1,2,3,4........\}$ ។ -ចំនួនគត់ដែលជាតួចែកនៃ 12 គឺ $\{1,2,3,4,6,12\}$ ។ -ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 5 ហើយតូចជាង30គឺ $\{5,10,15,25\}$

ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (២៥នាទី)		
១. ការចូលរួម បែងចែកសិស្សជាក្រុមដែលមានសមាជិក5នាក់ ដើម្បីសង្កេតលើសកម្មភាពសិក្សា **២. ការរុករក** ជួយក្រុមនីមួយៗធ្វើការពិភាក្សាលើសកម្មភាពសិក្សារបស់ខ្លួន **៣. ការពន្យល់** ស្តាប់សិស្សពន្យល់ចម្លើយតាមក្រុមនីមួយៗនិងឱ្យសិស្សបង្ហាញអំពីមូលហេតុដែលចាំបាច់ ។	សកម្មភាពសិក្សា ៖ ចូរជ្រើសរើសចំនួនគត់ចេញពីបញ្ជីចំនួនពី 1 ដល់ 100 ចូលក្នុងក្រុមខាងក្រោម ក. ចំនួនគត់សេស ខ. ចំនួនគត់គូ គ. ចំនួនបឋម ឃ. តួចែកនៃ 60 ។	**១. ការចូលរួម** -ក្រុមទី១ ៖ ក. ចំនួនគត់សេស -ក្រុមទី២ ៖ ខ. ចំនួនគត់គូ -ក្រុមទី៣ ៖ គ. ចំនួនបឋម -ក្រុមទី៤ ៖ ឃ. តួចែកនៃ 60 **២. ការរុករក** -ក្រុមទី១ ៖ ក. ចំនួនគត់សេស $\{1,3,5,7,9,....,99\}$ ឬ $\{x \mid x$ ជាចំនួនគត់សេសតូចជាង$100\}$ -ក្រុមទី២ ៖ ខ. ចំនួនគត់គូ $\{2,4,6,8,10,....,100\}$ ឬ $\{x \mid x$ ជាចំនួនគត់គូតូចជាងឬស្មើ$100\}$ -ក្រុមទី៣ ៖ គ. ចំនួនបឋម $\{2,3,5,7,11,....,97\}$ ឬ $\{x \mid x$ ជាចំនួនបឋមតូចជាង$100\}$ -ក្រុមទី៤ ៖ ឃ. តួចែកនៃ 60 $\{1,2,3,4,....,60\}$ ឬ $\{x \mid x$ ជាតួចែកនៃ 60 តូចជាងឬស្មើ $60\}$ **៣. ការពន្យល់** តំណាងក្រុមនីមួយៗពន្យល់ពីការរកឃើញរបស់ពួកគេ (សម្រាប់សំណួរនីមួយៗ) ទៅកាន់គ្រូនិងកែលម្អចម្លើយរបស់

	ជំពូក១ តក្កវិទ្យា សំណុំ និងចំនួន **មេរៀនទី២ សំណុំ** **២.១. សញ្ញាណសំណុំ** ក. សំណុំកំណត់តាមការរៀបរាប់ ឈ្មោះធាតុ ក. ចំនួនគត់ សេស $\{1,3,5,7,9,.....,99\}$ ខ. ចំនួនគត់គូ $\{2,4,6,8,10,....,100\}$ គ. ចំនួនបឋម $\{2,3,5,7,11,....,97\}$ ឃ. តួចែកនៃ 60 $\{1,2,3,4,....,60\}$	គេបើមើលឃើញថាជាការចាំបាច់
៤. បញ្ជាក់លម្អិត គ្រូបញ្ជាក់បន្ថែម - តើបណ្តុំនៃចំនួន $\{1,3,5,7,9,.....,99\}$ ហៅថាអ្វី ? -តើបណ្តុំនៃចំនួន $\{2,4,6,8,10,...,100\}$ ហៅថាអ្វី ? - តើបណ្តុំនៃចំនួន $\{2,3,5,7,11,....,97\}$ ហៅថាអ្វី ? - តើបណ្តុំនៃចំនួន $\{1,2,3,4,....,60\}$ ហៅថាអ្វី ?	-បណ្តុំនៃចំនួនទាំងនេះ $\{1,3,5,7,9,.....,99\}$ $\{2,4,6,8,10,..,100\}$ $\{2,3,5,7,11,....,97\}$ $\{1,2,3,4,....,60\}$ ហៅថា សំណុំ ។	**៤. បញ្ជាក់លម្អិត** -បណ្តុំនៃចំនួនទាំងអស់ហៅថា សំណុំ ។
-ផ្តល់ការពន្យល់បន្ថែម -តាមរយៈសកម្មភាពសិក្សា ចូរប្អូនឱ្យនិយមន័យសំណុំ ។ -តើសំណុំដែលគ្មានធាតុគេហៅថាជាអ្វី ?	-សំណុំគឺជាបណ្តុំវត្ថុដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ ។ ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A គេកំណត់សរសេរដោយ $n(A)$ ។ -សំណុំទទេ តាងដោយ $\varnothing$ ឬ $\{\}$ ។	- សំណុំគឺជាបណ្តុំវត្ថុដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ ។ ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A គេកំណត់សរសេរដោយ $n(A)$ ។ -សំណុំទទេ

ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (១០នាទី)		
៥. ការវាយតម្លៃ -ចែកលំហាត់ឱ្យសិស្សជាបុគ្គល -ហៅសិស្សបួននាក់ដោយចៃដន្យឡើងដោះស្រាយលើក្ដារខៀន	**សកម្មភាពទី២៖ដោះស្រាយលំហាត់តាមក្រុមនូវលំហាត់ខាងក្រោម** ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោមតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុនិងកំណត់ចំនួនធាតុ ក. $A=$សំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលធំជាង -2 តូចជាង 5 ខ. $B=$សំណុំនៃចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានដែលតូចជាង13 គ. $C=$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិប្រាំពីរចំនួនដំបូង ឃ. $D=$សំណុំនៃពហុគុណវិជ្ជមាននៃ 3ដែលតូចជាង 19	**៥. ការវាយតម្លៃ** សមាជិកក្រុមនីមួយៗឡើយដោះស្រាយប្រឡងប្រណាំង ក. $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$ មាន 6 ធាតុ ខ. $B=\{1,3,5,7,9,11\}$ មាន 6 ធាតុ គ. $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ មាន 7 ធាតុ ឃ. $D=\{3,6,9,12,15,18\}$ មាន 6 ធាតុ
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និង បណ្ដាំផ្ញើ (២ នាទី)		
-ដាក់លំហាត់ទី១ទំព័រទី៣៣ឱ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	លំហាត់ទី១ ទំព័រទី៣៣	-សិស្សគូសចំណាំលើលំហាត់និងលេខទំព័រ ស្ដាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃចន្ទ ១២កើត ខែអស្សុជ ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤ ត្រូវនឹងថ្ងៃទី២១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១១ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូក៥ ៖ លីមីត និងដេរីវេ

មេរៀនទី១ ៖ លីមីត និងដេរីវេ

១.២. ប្រមាណវិធីលើលីមីត(លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

រយៈពេល ៖ ៤៥នាទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបញ្ចប់ខ្លឹមសារនៃមេរៀននេះ

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សកំណត់សញ្ញាណ និងវិធានគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សមានសាមគ្គីភាពក្នុងក្រុម និងពិភាក្សាដោះស្រាយបញ្ហា។

II. **សម្ភារឧបទេស**

-សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ១៤២-១៤៣

-ហ្វឺត និងបន្ទាត់

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមលំនាំគំរូ5E

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពគ្រូ
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (២នាទី)		
គ្រូត្រួតពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់		រៀបចំសណ្តាប់ធ្នាប់
ជំហានទី២៖ រំលឹកមេរៀន (៦នាទី)		
- តើ $x=-2$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+5x+6=0$ ដែរឬទេ? -រួចដាក់កន្សោម x^2+5x+6	- $x=-2$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+5x+6=0$	-ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x=-2$ គេបាន $x^2+5x+6=0$ $(-2)^2+5(-2)+6=0$ $0=0$ ពិត ដូចនេះ $x=-2$ ឫសនៃសមីការ

ជាផលគុណកត្តា។ -សម្រួលកន្សោម -គណនា $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x+1}{x-2}$	-ផលគុណកត្តា $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ -$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x+1}{x-2}=7$	-ផលគុណកត្តា $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ -$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\frac{3^2-3+1}{3-2}=7$
ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (២៥នាទី)		
១. ការចូលរួម -ឱ្យសិស្សគណនាជាបុគ្គល -តើ $\frac{0}{0}$ ជាចម្លើយលីមីតនេះដែរ ឬទេ ? -បែងចែកសិស្សជា ៤ក្រុម ដែលមានសមាជិក៥នាក់ ដើម្បីសង្កេតលើសកម្មភាពសិក្សា **២. ការរុករក** ជួយក្រុមនីមួយៗធ្វើការពិភាក្សាលើសកម្មភាពសិក្សារបស់ខ្លួន តើភាគយក និងភាគបែងមានកត្តារួមដែរឬទេ ? -ចូរប្អូនគណនាលីមីតឡើងវិញ		**១. ការចូលរួម** $\frac{(-2)^2+5(-2)+6}{(-2)^2-4}=\frac{0}{0}$ -មិនអាចយកជាចម្លើយបានទេ **២. ការរុករក** $x=-2$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+5x+6=0$ នោះ $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ $x=-2$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-4=0$ នោះ $x^2-4=(x-2)(x+2)$ ដូចនេះ $(x+2)$ ជាកត្តារួមនៃភាគយក និងភាគបែង $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$

		$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}$ $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-2}$ $=\dfrac{-2+3}{-2-2}=\dfrac{1}{-4}$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}=-\dfrac{1}{4}$
	ជំពូកទី៥ **លីមីត និងដេរីវេ** មេរៀនទី១ **លីមីត និងដេរីវេ** ១.២ ប្រមាណវិធីលើលីមីត (លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)	
៣. ការពន្យល់ ស្ដាប់សិស្សពន្យល់ចម្លើយតាមក្រុមនីមួយៗ និងឱ្យសិស្សបង្ហាញអំពីមូលហេតុដែលចាំបាច់។	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$) $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}$ $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-2}$ $=\dfrac{-2+3}{-2-2}=\dfrac{1}{-4}$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}=-\dfrac{1}{4}$	**៣. ការពន្យល់** តំណាងក្រុមនីមួយៗពន្យល់ពីការរកឃើញរបស់ពួកគេ (សម្រាប់សំនួរនីមួយៗ) ទៅកាន់គ្រូ និងកែលម្អចម្លើយរបស់ពួកគេ បើមើលឃើញមានការចាំបាច់
៤. បញ្ជាក់លម្អិត ដើម្បីដោះស្រាយ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ តើប្អូនត្រូវធ្វើដូចម្ដេច ?	ដើម្បីដោះស្រាយ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$ មានរាង $\frac{0}{0}$ យើងត្រូវ - ដាក់ភាគយកភាគបែងជាផលគុណកត្តាដែលមានកត្តារួម $x-a$ - សម្រួលកត្តារួម $(x-a)$ ចោល - រកលីមីតនៃប្រភាគថ្មី	**៤. បញ្ជាក់លម្អិត** ជំនួស $x-a$ ក្នុង $f(x)$ និង $g(x)$ គេបាន $f(a)=0$, $g(a)=0$ បានជារាង $\frac{0}{0}$ - ដាក់ភាគយកភាគបែងជាផលគុណកត្តាដែលមានកត្តារួម $x-a$ - សម្រួលកត្តារួម $(x-a)$ ចោល - រកលីមីតនៃប្រភាគថ្មី

ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (១០នាទី)		
៥. ការវាយតម្លៃ ចែកលំហាត់ឱ្យសិស្ស ដោះស្រាយជាបុគ្គល	សកម្មភាពទី២៖ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖ ក. $\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+5(x-1)}{x^2-1}$ ខ. $\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$ ចម្លើយ ក. $\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+5(x-1)}{x^2-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+5(x-1)}{x^2-1}$ $=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+5)}{(x-1)(x+1)}$ $=\lim_{x\to1}\frac{x^2+5}{x+1}=3$ ខ. $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$ $=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(2x-1)}$ $=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{5}{7}$	**៥. ការវាយតម្លៃ** ក. $\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+5(x-1)}{x^2-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+5(x-1)}{x^2-1}$ $=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+5)}{(x-1)(x+1)}$ $=\lim_{x\to1}\frac{x^2+5}{x+1}=3$ ខ. $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$ $=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(2x-1)}$ $=\lim_{x\to-3}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{5}{7}$
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្តាំផ្ញើ (២នាទី)		
-កិច្ចការផ្ទះ៖	ចូរគណនាលីមីត ក. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x+1}{x^3+1}$ ខ. $\lim_{x\to2}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{6}{2-x}\right)$	-សិស្សកត់ត្រា

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃចន្ទ ១២កើត ខែអស្សុជ ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤ ត្រូវនឹងថ្ងៃទី២១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១២ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូក៤ ៖ អាំងតេក្រាល

មេរៀនទី១ ៖ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

២.៦. អាំតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន $\int\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)dx$

ក. ករណី $Q(x)=(ax+b)(cx+d)...$

រយៈពេល ៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបញ្ចប់ខ្លឹមសារនៃមេរៀននេះ

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សពន្យល់បានពីរបៀបគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន តាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ និងការធ្វើការងារជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវ។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សប្រើប្រាស់វិធីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលអនុគមន៍សនិទានក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលអនុគមន៍ប្រភេទនេះបានយ៉ាងល្អ ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សមានទម្លាប់ធ្វើការងារជាក្រុម។

II. **សម្ភារឧបទេស**

-សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ១៤២-១៤៣

-ហ្វឺត និងបន្ទាត់ ក្រដាសកាតុង

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា(លំនាំគំរូ5E)

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពសិស្ស**
ជំហានទី១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់(២នាទី)		
គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ		ប្រធានថ្នាក់ឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន
ជំហានទី២ ៖ រំលឹកមេរៀន(៥នាទី)		
១.គ្រូឲ្យសិស្សប្រាប់ពីរូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលរាង $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$		តំណាងសិស្សឡើងឆ្លើយ ១. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

២. គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ។ $\int \frac{3}{x+2}dx=?$		២. សិស្សធ្វើលំហាត់ និងតំណាងម្នាក់ឡើងបង្ហាញ $\int \frac{3}{x+2}dx = 3\int \frac{(x+2)'}{x+2}dx$ $= 3\ln\|x+2\|+C\ ;\ C\in\mathbb{R}$
ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣៥នាទី)		
(ចូលរួម) គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សរួចឱ្យសិស្សអានប្រធានដោយប្រុងប្រយ័ត្ន **១.យល់បញ្ហា** -តើគេសួររកអ្វីខ្លះក្នុងលំហាត់នេះ? -តើគេប្រាប់អ្វីខ្លះក្នុងលំហាត់នេះ? (រុករក) **២.ការបង្កើតផែនការ** ក.បើយើងមានកន្សោមសនិទាន $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ តើយើងអាចរកតម្លៃ A និង B តាមរបៀបណា?	**២.៦.អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន** $\int \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)dx$ **ក.ករណី** $Q(x)=(ax+b)(cx+d)...$ **លំហាត់៖** ក.ចូរកំណត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ ដែល $x\neq -2; x\neq 1$។ ខ.គណនា $\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ ។	(ចូលរួម) សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងសិស្សអានប្រធានលំហាត់ដោយយកចិត្តទុកដាក់ **១.យល់បញ្ហា** -គេសួររក A និង B និង គណនា $\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ គេប្រាប់ -A និង B ចំនួនពិត -កន្សោមសនិទាន $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ (រុករក) **២.ការបង្កើតផែនការ** ក. -តម្រូវភាគបែងរួមកន្សោម $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ -ធ្វើការផ្ទឹមលទ្ធផលខាងលើនឹង $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}$ រួចលុបភាគបែងចោល -តម្រូវភាគបែងរួម លុបភាគបែង រួចរក A និង B តាមការ

ខ.- តើប្អូនគណនា $\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ តាមរបៀបណា ?		ការកំណត់មេគុណត្រូវរៀងគ្នា ឬ ជំនួសតម្លៃ $x=-2; x=1$ ។ ខ.ដោយ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ នោះ $\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx=\int \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}dx$ ប្រើ $\int (u+v)dx=\int udx+\int vdx$ និង $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+C$
៣.អនុវត្តផែនការ -គ្រូបែងចែកសិស្សជាក្រុមដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់ខាងលើ -គ្រូដើរណែនាំតាមក្រុម	**ចម្លើយ៖** ក.កំណត់ចំនួនពិត A និង B $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$ $=\frac{(A+B)x+(2B-A)}{(x+2)(x-1)}$ $\Rightarrow B=1, A=3$ ដូចនេះ $A=3; B=1$ ខ.គណនា $\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ ដោយ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ $=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1}$ $\Rightarrow \int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ $=\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)dx$ $=\int \frac{3}{x+2}dx+\int \frac{1}{x-1}dx$ $=3\int \frac{(x+2)'}{x+2}dx+\int \frac{(x-1)'}{x-1}dx$ $=\ln\left\lvert (x+2)^3(x-1)\right\rvert+C \quad C\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ $\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ $=\ln\left\lvert (x+2)^3(x-1)\right\rvert+C \quad C\in\mathbb{R}$	**៣.អនុវត្តផែនការ** -សិស្សពិភាក្សាតាមក្រុម ក.កំណត់ចំនួនពិត A និង B $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$ $=\frac{(A+B)x+(2B-A)}{(x+2)(x-1)}$ ដោយ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ នោះ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(2B-A)}{(x+2)(x-1)}$ $\Leftrightarrow 4x-1=(A+B)x+(2B-A)$ $\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 2B-A=3 \end{cases}$ $\Rightarrow B=1, A=3$ របៀបផ្សេង៖ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ $=\frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$ $4x-1=A(x-1)+B(x+2)$ ឱ្យ $x=1 \Rightarrow 3=3B$ $\Rightarrow B=1$ ឱ្យ $x=-2 \Rightarrow -9=-3A$

(ពន្យល់) **៤.ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** -គ្រូឱ្យសិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយជាមួយមិត្តភក្តិក្បែរខ្លួននិងធ្វើការពន្យល់គ្នាព្រមទាំងដើរសម្របសម្រួល។ (បញ្ជាក់លម្អិត) គ្រូឱ្យសិស្សធ្វើការពន្យល់ និងសំយោគពីវិធីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)dx$ ដែល $Q(x)=(ax+b)(cx+d)\ldots$ និង $\deg ree(P)<\deg ree(Q)$	**ជាទូទៅ៖** បើគេមានអាំងតេក្រាលទម្រង់ $\int\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)dx$ ដែល $Q(x)=(ax+b)(cx+d)\ldots$ គេត្រូវ៖ (១).សរសេរ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាទម្រង់ $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}+\ldots$ • បើ $\deg ree(P)<\deg ree(Q)$ នោះគេបាន $A(x)=0$ • បើ $\deg ree(P)>\deg ree(Q)$ នោះគេបាន $A(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា • បើ $\deg ree(P)=\deg ree(Q)$ នោះគេបាន $A(x)$ ជាចំនួនថេរ (២). ប្រើ $\int\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx=\ln\|f(x)\|+C$ ដើម្បី	$\Rightarrow A=3$ ដូចនេះ $A=3;B=1$ ខ.គណនា $\int\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ ដោយ $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ $=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1}$ $\Rightarrow\int\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}dx$ $=\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)dx$ $=\int\frac{3}{x+2}dx+\int\frac{1}{x-1}dx$ $=3\int\frac{(x+2)'}{x+2}dx+\int\frac{(x-1)'}{x-1}dx$ $=\ln\|(x+2)^3(x-1)\|+C\ C\in\mathbb{R}$ (ពន្យល់) **៤.ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** -សិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយដែលខ្លួនធ្វើជាមួយនិងចម្លើយមិត្តភក្តិ និងធ្វើការពន្យល់គ្នាលើចំណុចដែលខ្វះខាត (បញ្ជាក់លម្អិត) -សិស្សរៀបរាប់ពីវិធីដោះស្រាយដោយផ្អែកលើឧទាហរណ៍ខាងលើ

	គណនា $\int\frac{A_1}{ax+b}dx$, $\int\frac{A_2}{cx+d}dx,\ldots$ ។	
ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (៦នាទី)		
(វាយតម្លៃ) -គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សតាមក្រុមធ្វើ និងឡើងបិតចម្លើយរបស់ខ្លួនលើក្តាខៀន	**លំហាត់៖** គណនា $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx$ **ចម្លើយ៖** គណនា $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx$ មាន $\frac{2x-3}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow A=-3\ ,\ B=5$ គេបាន $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx=-3\ln\|x\|+5\ln\|x+1\|+C\ ;\ C\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx=-3\ln\|x\|+5\ln\|x+1\|+C\ ;\ C\in\mathbb{R}$	(វាយតម្លៃ) សិស្សពិភាក្សាតាមក្រុម រួចសរសេរចម្លើយរបស់ពួកគេលើក្រដាស់កាតុងធដើម្បីបិទលើក្តាខៀន។គណនា $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx$ មាន $\frac{2x-3}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ $=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$ $\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\A=-3\end{cases}$ $\Rightarrow A=-3\ ,\ B=5$ គេបាន $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx$ $=-3\ln\|x\|+5\ln\|x+1\|+C\ ;\ C\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ $\int\frac{2x-3}{x(x+1)}dx$ $=-3\ln\|x\|+5\ln\|x+1\|+C\ ;\ C\in\mathbb{R}$
ជំហានទី ៥៖ កិច្ចការផ្ទះ (២ នាទី)		
-គ្រូដាក់កិច្ចការផ្ទះឱ្យសិស្ស -គ្រូណែនាំពីបរិស្ថាន	លំហាត់ទី៖ ប្រតិបត្តិ ទំព័រទី១២៥	-សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រារួចជម្រាបលាគ្រូទៅផ្ទះ

គំរូមេរៀនទី១ ៖ ប្រូបាបលីតេ

១.១. សាកលលទ្ធផល និងព្រឹត្តិការណ៍

និយមន័យ១៖ ពិសោធចៃដន្យ (Random Experiment) ជាសកម្មភាព ឬជាបាតុភូតដែលគេមិនអាចដឹងលទ្ធផលទុកជាមុនដោយប្រាកដឡើយ។ គេហៅម្យ៉ាងទៀតថាវិញ្ញាសាចៃដន្យ។

និយមន័យ២៖ សាកលលទ្ធផល ឬសាកលករណីអាច គឺសំណុំដែលធាតុរបស់វាជាលទ្ធផលទាំងអស់នៃពិសោធចៃដន្យ។ គេតាងសាកលលទ្ធផលដោយអក្សរ Ω ។

សម្គាល់៖ ក្នុងស្ថិតិគេហៅ សាកលលទ្ធផល ថាលំហាគំរូចៃដន្យ (Sample Space) ។

និយមន័យ៣៖ ព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ (Random Event) គឺជាសំណុំរងទាំងអស់របស់សាកល លទ្ធផល។ គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ដោយអក្សរ $A, B, C, ...$ ។

និយមន័យ៤៖ ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ (Simple Event) គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានធាតុតែមួយ។

និយមន័យ៥៖ (ព្រឹត្តិការណ៍សមាស) ព្រឹត្តិការណ៍ពីរ A និង B ហៅថាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា (Mutually Exclusive) កាលណា $A \cap B = \varnothing$ ។

ឧទាហរណ៍៖ បើគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់នោះ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ និងប្រសិនបើគេប្រាថ្នាបោះបានលេខគូ នោះ $A = \{1,3,5\}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍។

បើគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់នោះ $\Omega = \{ (1,1),(1,2),........,(6,6)\}$ និងប្រសិនបើគេប្រាថ្នាបោះបានមុខលេខដូចគ្នា នោះ $\Omega = \{ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍។

២.២ រាប់

១.២.១ គោលការណ៍រាប់

ជួនកាលការសិក្សារាប់មានការពិបាក និងសាំញុំាំណាស់។ ប៉ុន្តែក្នុងពេលនេះយើងនឹងសិក្សាពីគោលការណ៍ និងរូបមន្តសំខាន់ៗមួយចំនួនប៉ុណ្ណោះ គឺប្រសព្វ និងប្រជុំ។

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សចំនួន 40 នាក់មានបរិញ្ញាបត្រ។ ក្នុងចំណោមសិស្សទាំងនោះមាន 20 នាក់ មានបរិញ្ញាបត្រផ្នែកភាសាអង់គ្លេស និង 25 នាក់មានបរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា។ ចូររកចំនួនសិស្សដែលមានបរិញ្ញាបត្រ

ក. ទាំងពីរផ្នែក ខ. តែផ្នែកភាសាអង់គ្លេស គ. តែផ្នែកគណិតវិទ្យា

ចម្លើយ៖ ក. 5 ខ. 15 គ. 20

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យ $n(U) = 50$, $n(A) = 25$, $n(B) = 30$ និង $n(A \cap B) = x$ ។
ចូររកតម្លៃធំបំផុត និងតម្លៃតូចបំផុតរបស់ x ។

ចម្លើយ៖ $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = 25$

ករណីទូទៅ

ក. គោលការណ៍ប្រមាណវិធីបូក

ឧបមាថាមាន k ព្រឹត្តិការណ៍ $A_1, A_2, ..., A_k$ កើតឡើងដោយមិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗ នោះចំនួនជាតុ (ឬចំនួនរបៀប) នៃ k ព្រឹត្តិការណ៍នេះកើតឡើងព្រមគ្នា គឺ៖

$$n(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_k)$$

ឧទាហរណ៍៖ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរ (មួយតូច និងមួយទៀតធំ) ។ រកចំនួនករណីដែលមានផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរតូចជាង 5 ។

ចម្លើយ៖ ចំនួនដែលតូចជាង 5 គឺ 2 3 4

តាង A_1 ផលបូកស្មើ 2 គឺ $A_1 = \{ (1,1) \} \Rightarrow n(A_1) = 1$

A_2 ផលបូកស្មើ 3 គឺ $A_2 = \{ (1,2), (2,1) \} \Rightarrow n(A_2) = 2$

A_3 ផលបូកស្មើ 4 គឺ $A_3 = \{ (1,3), (2,2), (3,1) \} \Rightarrow n(A_3) = 3$

គេបាន $n(S) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 6$

ខ. គោលការណ៍ប្រមាណវិធីគុណ

ឧបមាថាមាន k ព្រឹត្តិការណ៍ $A_1, A_2, ..., A_k$ កើតឡើងដោយមិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗ នោះចំនួនជាតុ (ឬចំនួនរបៀប) នៃ k ព្រឹត្តិការណ៍នេះកើតឡើងព្រមគ្នា គឺ៖

$$n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot ... \cdot n(A_k)$$

ឧទាហរណ៍៖ ដើម្បីធ្វើដំណើរពី A ទៅ C យើងត្រូវឆ្លងកាត់ B ។ គេដឹងថា មាន 3 របៀបក្នុងការធ្វើដំណើរពី A ទៅ B និងមាន 2 របៀបក្នុងការធ្វើដំណើរពី B ទៅ C ។ រកចំនួនរបៀបក្នុងការធ្វើដំណើរពី B ទៅ C ។

ចម្លើយ៖ 6

ឧទាហរណ៍៖ រកចំនួនតួចែកវិជ្ជមាននៃចំនួនដូចខាងក្រោម៖

ក. 16 ខ. 75

ចម្លើយ៖ ក. 5 ខ. 6

លំហាត់៖ ក្នុងពិធីជប់លៀងមួយ ភ្ញៀវអាចជ្រើសរើសម្ហូបអាហារបានដូចខាងក្រោម៖

- អាហារ៖ នំបញ្ចុក ឬនំប៉័ង
- ម្ហូប៖ ការីគោ ការីមាន់ ឬការីជ្រូក
- បង្អែម៖ ផ្លែឈើ ឬចេកខ្ទិះ

តើភ្ញៀវអាចជ្រើសរើសម្ហូបអាហារបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា?

(បញ្ជាក់៖ ភ្ញៀវម្នាក់ៗត្រូវជ្រើសរើសអាហារទាំងបីប្រភេទ)

១.២.២ ចម្លាស់ (Permutation)

និយមន័យ៖ ចម្លាស់ គឺជាការរៀបគិតលំដាប់។

ក. ចម្លាស់ r ធាតុ ក្នុង n ធាតុ (ជាបន្ទាត់)

➢ មិនសាឡើងវិញ $N = P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

➢ សាឡើងវិញ $N = n^r$

ឧទាហរណ៍៖ រកចំនួនចម្លាស់នៃ3អក្សរ ក្នុងចំណោមអក្សរ A, B, C, D, E, F ។

ចម្លើយ៖ $N = 120$

ឧទាហរណ៍៖ ចូរសរសេរចំនួនមានលេខពីរខ្ទង់ ដោយប្រើលេខ $1, 2, 3, 4, 5$ ។

ចម្លើយ៖ $N = 5^2$

លំហាត់៖ គេប្រើលេខ $0,1,2,3,4,5$ ដើម្បីបង្កើតចំនួនមួយ។ រកលទ្ធផលដែលអាចបង្កើតបានចំនួន

ក. មានលេខពីរខ្ទង់ ហើយខ្ទង់នីមួយៗមានលេខខុសៗគ្នា

ខ. មានលេខពីរខ្ទង់

គ. មានលេខបីខ្ទង់

ឃ. មានលេខបីខ្ទង់ ដែលខ្ទង់នីមួយៗមានលេខខុសគ្នា

ខ. ចម្លាស់ n ធាតុ ក្នុង n ធាតុ (ជាបន្ទាត់)

➢ មិនសាឡើងវិញ $N = P(n) = n!$

➢ សាឡើងវិញ $N = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$ ដែល $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$

ឧទាហរណ៍៖ រកចំនួនចម្លាស់នៃ ក្មេងប្រុស 2 នាក់ និងក្មេងស្រី 3 នាក់ តាមករណីដូចខាងក្រោម៖

ក. ក្មេងប្រុសឈរនៅចុងសងខាង

ខ. ក្មេងប្រុសទាំងពីរនៅជិតគ្នា

ចម្លើយ៖ ក. 12 ខ. 288

លំហាត់៖១. មានបុរស 2 នាក់ និងនារី 2 នាក់ បានឈរតម្រង់ជួរគ្នាទិញសំបុត្រចូលទស្សនាក្នុងរោងភាពយន្តមួយកន្លែង។ រកចំនួនរបៀបដើម្បីឱ្យ

ក. នារីទាំងពីរនាក់ឈរមុខគេ

ខ. អ្នកឈរមុខគេបង្អស់ជានារី

គ. នារីទាំងពីរនាក់ឈរជាប់គ្នា

ឃ. បុរស និងនារីឈរឆ្លាស់គ្នា

២. មានក្មេងប្រុស 4 នាក់ និងស្រី 5 នាក់បានឈរតម្រង់គ្នាជាជួរ។ រកចំនួនចម្លាស់

ក. ដែលពីរនាក់ខាងមុខជាក្មេងស្រី

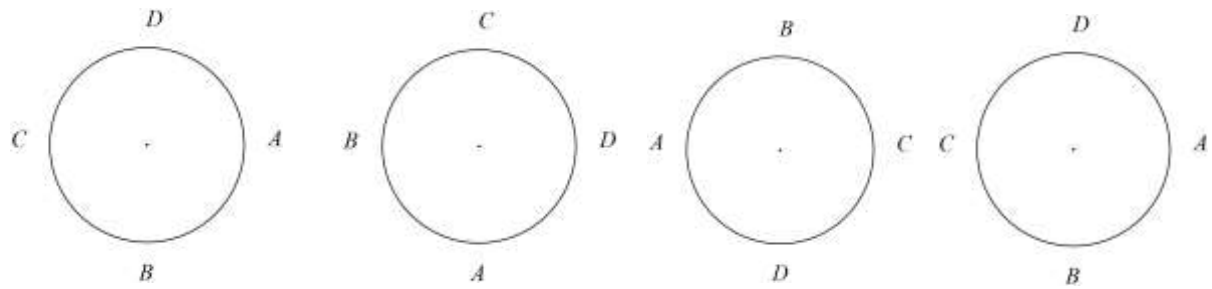
ខ. ខាងមុខជាក្មេងប្រុស ហើយខាងក្រោយជាក្មេងស្រី

គ. ក្មេងប្រុសឈរជាប់គ្នាទាំងបួននាក់

ង. ក្មេងស្រីឈរជាប់គ្នាទាំងប្រាំនាក់។

គ. ចម្លាស់វង់

យើងនឹងតម្រៀបអក្សរ A, B, C, D ជារង្វង់។



បួនតម្រៀបខាងលើនេះ ត្រូវបានគិតថាដូចគ្នា។ គេបាន ចំនួនតម្រៀបនៃបួនអក្សរគឺ $\frac{4!}{4}=6$
ឬ $(4-1)!=3!=6$

ដូចនេះ យើងអាចរកចំនួនចម្លាស់ជារង្វង់ដោយធ្វើការចែកចម្លាស់ធម្មតា និងចំនួននៃការបង្វិល។

ចម្លាស់វង់៖ ចម្លាស់នៃ n វត្ថុជារង្វង់កំណត់ដោយ $N=\frac{n!}{n}=(n-1)!$

ឧទាហរណ៍៖ មនុស្សមួយក្រុម មានស្រី 3 នាក់ និងប្រុស 2 នាក់ បានអង្គុយព័ទ្ធជុំវិញជារង្វង់។ រកចំនួនរបៀបដូចខាងក្រោម៖

ក. ចំនួនរបៀបខុសគ្នាដែលពួកគាត់អាចអង្គុយបាន

ខ. ចំនួនរបៀបដែលមនុស្សប្រុសអង្គុយជាប់គ្នា

ចម្លើយ៖ ក. 24 ខ. 12

លំហាត់៖ ១. មានមនុស្ស 6 នាក់ត្រូវបានអង្គុយជារង្វង់ ដែលក្នុងនោះមានឈ្មោះ A និង B ។

ក. រកចំនួនចម្លាស់ទាំងអស់។

ខ. រកចំនួនចម្លាស់នៅពេលដែល A និង B ត្រូវអង្គុយជិតគ្នា។

២. យើងធ្វើចម្លាស់នៃអក្សរ A,B,C,D,E,F ។ រកចំនួនចម្លាស់ដូចខាងក្រោម

ក. អក្សរទាំងអស់លើបន្ទាត់តែមួយ

ខ. អក្សរទាំងអស់ជារង្វង់

គ. អក្សរទាំងអស់ជាបន្ទាត់ ដែល A និង B នៅជិតគ្នា

ឃ. អក្សរទាំងអស់ជាបន្ទាត់ ដែល A និង B នៅចុងសងខាង

ង. អក្សរទាំងអស់ជារង្វង់ ដែល A និង B នៅជិតគ្នា

ច. អក្សរតែ 3 ។

១.២.៣ បន្សំ

និយមន័យ៖ បន្សំ គឺជាតម្រៀបមិនគិតលំដាប់។

ជាទូទៅ៖ បន្សំនៃ r វត្ថុ ក្នុង n វត្ថុជាការដកយកព្រមគ្នានៃ r វត្ថុ ក្នុង n វត្ថុ ។

ចំនួនបន្សំនៃ r វត្ថុ ក្នុង n វត្ថុកំណត់ដោយ $C(n,r)=C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ។

ឧទាហរណ៍៖ ក្រុមកីឡាករមួយមាន 7 នាក់ បានមកពីការជ្រើសរើសក្នុងចំណោមកីឡាករចំនួន 12 នាក់។ កីឡាករម្នាក់ក្នុងចំណោមកីឡាករ 7 នាក់ត្រូវបានជ្រើសរើសធ្វើជាប្រធានក្រុម ហើយម្នាក់ទៀតគេជ្រើសរើសធ្វើជាអនុប្រធានក្រុម។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលអាចជ្រើសរើសបាន?

លំហាត់៖ សិស្សមួយក្រុមមាន ប្រុស 4នាក់ និងស្រី 7នាក់។ តើមានប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីបង្កើតបាននូវក្រុមកីឡាមួយដែលមានសមាជិកចំនួន 5នាក់ ប្រសិនបើ៖

ក. គ្មានមនុស្សប្រុស

ខ. យ៉ាងហោចណាស់មានមនុស្សប្រុសម្នាក់ ឬមានមនុស្សស្រីម្នាក់

គ. មានប្រុស 2នាក់ និងស្រី 3នាក់

ឃ. យ៉ាងហោចណាស់មានមនុស្សប្រុស 3នាក់។

១.២.៤ បំណែងចែក

យើងអាចអនុវត្តរូបមន្តបន្សំក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់នៃបំណែងចែក។

ឧទាហរណ៍៖ ក្រុមមួយមានមនុស្ស 12នាក់ ត្រូវបានបែងចែកជាបីគណៈកម្មការ A,B និង C ដែលគណៈកម្មការនីមួយៗមានគ្នា 4នាក់។ រកចំនួនបំណែងចែកដែលកើតឡើង។

- ចំនួនរបៀប ដើម្បីជ្រើសរើសមនុស្ស 4នាក់ ជាគណៈកម្មការ A គឺ $C(12,4)$
- ចំនួនរបៀប ដើម្បីជ្រើសរើសមនុស្ស 4នាក់ ជាគណៈកម្មការ B គឺ $C(8,4)$
- ចំនួនរបៀប ដើម្បីជ្រើសរើសមនុស្ស 4នាក់ ជាគណៈកម្មការ C គឺ $C(4,4)$

យើងអាចរកបំណែងចែក ដោយប្រើរូបមន្តផលគុណ

$$C(12,4)\times C(8,4)\times C(4,4)=\frac{12!}{4!8!}\times\frac{8!}{4!4!}\times\frac{12!}{4!0!}=\frac{12!}{4!4!4!}=34650$$

បំណែងចែកប្រភេទនេះ ហៅថា បំណែងចែកមានលំដាប់នៃប្រភេទ $(4,4,4)$។

ពាក្យលំដាប់ត្រូវបានគេប្រើ ពីព្រោះគណៈកម្មការទាំងបីនេះត្រូវបានគេដាក់ផ្សេងៗគ្នា និងជ្រើសរើសមនុស្សទី $1-4$ ជាគណៈកម្មការ A មនុស្សទី $5-8$ ជាគណៈកម្មការ B និងផ្ទុយមកវិញមនុស្សទី $5-8$ ជាគណៈកម្មការ A និងមនុស្សទី $1-4$ ជាគណៈកម្មការ B ។

ចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាន

ចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាននៃ សំណុំមួយមាន n ធាតុមានប្រភេទ $r_1,r_2,...,r_k$ ដែល $r_1+r_2+...+r_k=n$ កំណត់ដោយ $\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times...\times r_k!}$។

បើសិនជាយើងមិនគិតលំដាប់ថា គណៈកម្មការផ្សេងពីគ្នា យើងត្រូវចែកចំនួនបំណែងចែកនឹងចំនួន

ចម្លាស់នៃគណៈកម្មការ។ ក្នុងករណីនេះ យើងមាន បីគណៈកម្មាការមានសមាជិកដូចគ្នា នោះយើងត្រូវចែក នឹង $3!=6$ ។ ដូចនេះចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាន គ្មាលំដាប់ គឺ $\frac{34650}{6}=5775$ ។

ឧទាហរណ៍៖ ប្រភេទ $(4,4,4)$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $3!$

ប្រភេទ $(5,5,4)$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $2!$

ប្រភេទថ $(2,2,4,4)$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $2!\cdot 2!$

ប្រភេទ $(5,5,5,4,2,2,1,1)$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $3!\cdot 2!\cdot 2!$

លំហាត់៖ រកចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាន ដែលអាចកើតឡើងលើមនុស្ស 8 នាក់ ក្នុងករណីនីមួយៗ

ក. ចែកជាបួនក្រុម A,B,C និង D ដែលក្រុមនីមួយៗមានពីរនាក់

ខ. ចែកជាបួនក្រុម ដែលក្រុមនីមួយៗមានពីរនាក់ (គ្មានឈ្មោះក្រុម)

គ. ចែកជាក្រុមដែលមាន 4 នាក់ 3 នាក់ និង 1 នាក់ ដោយមិនដាក់ឈ្មោះក្រុម

ឃ. ចែកជាក្រុមដែលមាន 4 នាក់ 2 នាក់ និង 2 នាក់ ដោយមិនដាក់ឈ្មោះក្រុម។

១.៣. ប្រូបាប៊ីលីតេ

ក. និយមន័យ និងស្វ័យសត្យ

និយមន័យ៖ គេឱ្យ Ω ជាសំណុំកំណត់មួយ និង $Pow(\Omega)$ ជាសំណុំរងដោយផ្នែកនៃ Ω។ ឋគេថាប្រូបាប៊ីលេតេនៃលំហ $(\Omega, Pow(\Omega))$ គឺជាអនុវត្ត P កំណត់ពី $Pow(\Omega)$ ទៅ $[0,1]$។

ស្វ័យឋសត្យ៖ $(1).P(\Omega)=1$

(2) គ្រប់ $A,B\subseteq\Omega$ ដែល $A,B\subseteq\varnothing$ នោះ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

សម្គាល់៖ គ្រប់ $A\subseteq\Omega$ នោះ $0\le P(A)\le 1$ ដែល Ω: សកលលទ្ធផល និង A :ព្រឹត្តិការណ៍

ខ. លក្ខណៈប្រូបាប៊ីលីតេ

លក្ខណៈទី១៖

គេឱ្យ Ω ជាសកលលទ្ធផល ហើយ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ គេបាន៖

(1). $P(\overline{A})=1-P(A)$

(2). $P(\varnothing)=0$

(3). $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

(4). បើ $A\subseteq B$ នោះ $P(A)\le P(B)$

(5). $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ស្រាយ៖(ជាលំហាត់)

លក្ខណៈទី២៖

(1). ចំពោះគ្រប់គ្រួសារព្រឹត្តិការណ៍ $(A_i)_{1\le i\le n}$ នោះ

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\ldots+(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

(2). ចំពោះគ្រប់គ្រួសារព្រឹត្តិការណ៍ $(A_i)_{1\le i\le n}$ មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗនោះ

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3). ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ $A, P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$ ដែល $\{\omega_i\}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកជាតុ

(4). បើ $E_1, E_2, ..., E_n$ ជា n ព្រឹត្តិការណ៍ឯកជាតុនៃសកលលទ្ធផល Ω នោះ

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

គ. ការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តការណ៍(Probability of an Event)

និយមន័យ៖ ប្រូបាប៊ីលីតេគឺជាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ឯកជាតុទាំងអស់នៃសាកលលទ្ធផល Ω ដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេស្មើៗគ្នា។តាងដោយ p។

បើ បើ $E_1, E_2, ..., E_n$ ជា n ព្រឹត្តិការណ៍ឯកជាតុនៃសាកលលទ្ធផល Ω នោះ

$E_1 \cup E_2 \cup ......\cup E_n = \Omega$ និង $p(E_1) = p(E_2) = ... = p(E_n) = p$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup .....\cup E_n) = P(\Omega)$$

$$P(E_1) + p(E_2) + ... + P(E_n) = 1 \Leftrightarrow np = 1 \Leftrightarrow P = \frac{1}{n}$$

ទ្រឹស្តីបទ៖ (ការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍)

គេឱ្យ Ω ជាសាលកលទ្ធផល(ករណីអាច)និង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ $A \subseteq \Omega$ (ករណីស្រប)។ គេបាន ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍គឺ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីខ្មៅ 8 និងឃ្លីស 10។ ឃ្លីពីរត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ។

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បាន

ក. ឃ្លីមានពណ៌ខុសគ្នា

ខ. ឃ្លីមានពណ៌ដូចគ្នា

ចម្លើយ ក. 0.52 ខ. 0.48

លំហាត់

១. គេតម្រៀបមនុស្សមួយក្រុមជាជួរមាន បុរស 3 នាក់ និងស្ត្រី 3 នាក់។

រកប្រូបាប៊ីលីតេ ក្នុងករណីដូចខាងក្រោម៖

ក. បុរស និង ស្ត្រី ឈរឆ្លាសគ្នា

ខ. បុរសឈរនៅសងខាង

២. គេប្រើលេខ 0,1,2,3,4,5 ដើម្បីបង្កើតចំនួនមួយមានលេខពីរខ្ទង់។

រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអាចបង្កើតបាន ៖

ក. ចំនួនដែលខ្ទង់នីមួយៗមានលេខខុសគ្នា

ខ. ចំនួនគូ

គ. ចំនួនបឋម

ឃ. ចំនួនជាពហុគុណនៃប្រាំ

៣. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់មួយធំ និងមួយទៀតតូចព្រមគ្នា។ មុខរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់នីមួយៗ មានចុះលេខពីរ 1 ដល់ 6 ។តាង x ជាលទ្ធផលនៃគ្រាប់ឡុកឡាក់ធំនិង y ជាលទ្ធផលនៃគ្រាប់ឡុកឡាក់តូច។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម

ក. $A: x = y$ ខ. $B: x > y$ គ. $C: x < y$ ឃ. $D: x^2 < y^2$ ង. $E: 3x - y = 10$

៤. គេឱ្យ A និង B ជាពីរព្រឹត្តិការណ៍ដែល $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ និង $P(A \cup B) = 0.5$ ។

ក. គណនា $P(A \cap B)$

ខ. គណនា $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

គ. គណនា $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cup B)$

៥. ក្នុងថង់មួយមាន បាល់ខ្មៅ 4 បាល់ស 5 និងបាល់លឿង 3 ។ បាល់បីត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បាន ៖

ក. បាល់មានពណ៌ខុសគ្នា

ខ. បាល់មានពណ៌ដូចគ្នា

គ. បាល់សតែមួយគត់

ឃ. បាល់សយ៉ាងតិចមួយ

១.៤ ប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌ

ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 9គ្រាប់ ដែលក្នុងនោះប៊ូល 5 គ្រាប់មានពណ៌ខ្មៅចុះលេខពី 1 ដល់5 រៀងគ្នា និង 4គ្រាប់មានពណ៌ស បានចុះលេខពី 6 ដល់ 9រៀងគ្នា។គេទាញយកប៊ូលមួយ

គ្រាប់ពីក្នុងថង់ ហើយតាងពីរ

ព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖

A: ប៊ូលជាពណ៌ខ្មៅ

B:ជាប៊ូលដែលចុះលេខគូ

គេបាន៖ $n(\Omega) = 9$, $n(A) = 5$, $n(B) = 4$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{9} \text{ និង } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{9}$$

ប្រសិនបើយើងគិតលើករណីតែមួយគត់ នៅពេលដែលប៊ូលមួយត្រូវបានទាញចេញជាពណ៌ខ្មៅ នោះលំហសំណាកជាការលក្ខខណ្ឌឱ្យ Aហើយព្រឹត្តិការនៃការទាញប៊ូលមួយជាចំនួនគូត្រូវនឹង $A \cap B$ ។

ដូចនេះ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការទាញប៊ូលជាចំនួនគូនៅពេលដែលយើងដឹងថាប៊ូលនោះជាពណ៌ខ្មៅ

គេអាចសរសេរជា

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{5}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ជាទូទៅ៖ ឧបមាថា A និង B ជាចំនួនគូនៅក្នុងលំហសំណាកមួយហើយការឧបមាតទៅទៀតនេះថា ព្រឹត្តិការណ៍ A លើតឡើងននោះប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ B កកើតឡើងដោយដឹងថាមានព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើងរួចហើយ គេហៅថា ប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌនៃ B ដើយដឹងថា A កើតឡើងមុន។ គេកំណត់សរសេរដោយ $P(B/A)$ ។

និយមន័យ៖ ប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌនៃ B ដោយដឹងថា A កំណត់ដោយ

$$P(B/A=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \text{ បើ } P(A)\neq 0$$

ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ស 5 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ4 ។គេទាញយកពីរប៊ូលពីរបន្តបន្ទាប់គ្នា ដោយមិនដាក់ប៊ូលទីមួយចូលវិញមុននឹងចាប់ប៊ូលទីពីរ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលគេចាប់បានប៊ូលទីពីរពណ៌ខ្មៅ ដោយដឹងថាប៊ូលទីមួយចាប់បានពណ៌ស។

ចម្លើយ៖ 0.50

ឧទាហរណ៍៖ គេហូតកាតមួយសន្លឹកពីក្នុងកាតចំនួន 15សន្លឹក ដែលមានទចុះលេខពី 1ដល់15 រៀងគ្នា។ រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលហូតបានកាតមានលេខជាពហុគុណនៃ3 ដោយដឹងថាវាជាចំនួនគូ។

ចម្លើយ៖ $\frac{2}{7}$

រូបមន្តផលគុណ

$P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$, $P(A)\neq 0$

$P(A\cap B)=P(B).P(A/B)$, $P(B)\neq 0$

លក្ខណៈប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌ

(1). $P\left(\overline{B}/A\right)=1-P(B/A)$

(2). $P(B_1\cup B_2/A)=P(B_1/A)+P(B_2/A)-P(B_1\cap B_2/A)$

(3). ចំពោះ n ជាព្រឹត្តិការណ៍ A_1 , A_2 ,....., A_n ដែល $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)\neq 0$ គេបាន

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1\cap A_2\cap....\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot....\cdot P(A_n/A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

១.៥ ព្រឹត្តការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

ព្រឹត្តិការណ៍ពីរក្នុងវិញ្ញាសាតែមួយ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា កាលណាលទ្ធផលនៃការកើតឡើងរវាងព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗមិនមានឥទ្ធិពលលើគ្នា។

គេបាន៖ $P(B/A)=P(B)$ និង $P(A/B)=P(A)$

និយមន័យ៖ ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា កាលណា

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

និយមន័យ៖ បើ $(A_i)_{i\in I}$ ជាគ្រួសារព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាពីរៗ កាលណា

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i)=\prod_{i\in I} P(A_i)$$

លក្ខណៈនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

បើ A និង B ជាពីរព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នានោះ A និង $\overline{B}$, $\overline{A}$ និង B , $\overline{A}$ និង $\overline{B}$ ក៏ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាដែរ។

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់មួយតូច និងមួយធំ។

គេតាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ធំចេញលេខ1

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់តូចចេញលខ2

C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបូកលេខលើគ្រាប់ទាំងពីរស្មើនឹង 6

ក. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាឬទេ?

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាដែរឬទេ?

ចម្លើយ៖ ក. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

ខ. A និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា

លំហាត់៖ ១. គេឱ្យ A , B , C ជាបីព្រឹត្តិការណ៍នៃលំហ Ω ដែលៈ

$$P(A)=\frac{1}{2}\,,\ P(B)=\frac{3}{5}\,,\ P(A\cap B)=\frac{1}{5}\,,\ P(X/A)=P\left(X/B\right)=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{P(X)}\in N$$

គណនា $P(X)$ ។

២. គេឱ្យ $P\in[0,5]$ និង A , B , C , D ជាបបួនព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗហើយ

$P(A)=P(D)=p$ និង $P(B)=P(C)=\frac{1}{2}-p$ ។

តើព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$, $A\cup C$, $A\cup D$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នាពីរៗឬទេ?

៣. គេឱ្យ A , B ជាពីរព្រឹត្តិការណ៍ដែល $P(A)=P(B)=\frac{3}{4}$ ។

គណនាតម្លៃធំបំផុត និង តូចបំផុតនៃ $P(A\cap B)$ ។

៤. គេឱ្យ $(A_i)_{i\in N}$, $(B_i)_{I\in N}$ ជាពីរព្រឹត្តិការណ៍នៃលំហ Ω ដែល $\forall i\in N, A_i\subset B_i$

ក. បង្ហាញថា $P(B_1\cup B_2)-P(A_1\cup A_2)\le P(B_1-A_1)+P(B_2-A_2)$

ខ. បង្ហាញថា $P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)-P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\le P(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i-A_i))$ ។

១.៦ រូបមន្តប្រូបាបលីតេសរុប

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ $(A_i)_{i\in N}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បបំណែកមួយនៃសាកល Ω ដែល $P(A_i)\neq 0,\forall i\in I$ ។

ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ B មួយនៃ Ω គេបាន $P(B)=\sum_{i\in I} P(B\cap A_i)=\sum_{i\in i} P(A_i)\cdot P(B/A_i)$

សម្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ សហគ្រាសមួយមានកម្មករ ១០០នាក់ហើយបែងចែកជាពីរក្រុម។
ក្រុមទី១ មានកម្មករ ៤០នាក់ហើយក្នុងនោះមាន 60% ចូលជាសមាជិកសហជីពសេរីកម្មករ និង
ក្រុមទី២ មានកម្មការ ៦០នាក់ហើយក្នុងនោះមាន 80% ចូលជាសមាជិកសហជីពសេរីកម្មករ ។
គេជ្រើសរើសកម្មករម្នាក់ដោយចៃសដន្យ។ រកប្រូបាបប៊ីលីតេដែលគាត់ជាសមាជិកសហជីពកម្មករសេរី។
ចម្លើយ
តាង A_i ជាព្រឹត្តិការដែលគាត់ជាកម្មករនៅក្រុមទី១
B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគាត់ជា សមាជិកសហជីពសេរីកម្មករ
តាមទ្រឹស្តីបទនៃប្រូបាប៊ីលីតេសរុប ៖ $P(B)=P(A_1)\times P(B/A_1)+P(A_2)\times P(B/A_2)$
សម្មតិកម្ម $P(A_1)=40\%$, $P(B/A_1)=60\%$, $P(A_2)=60\%$, $P(B/A_2)=80\%$
ដូចនេះ $P(B)=(0.4)(0.6)+(0.6)(0.8)=0.72$ ។
ឧទាហរណ៍៖ គេមានម៉ាស៊ីន A_1 , A_2 , A_3 ផលិតវត្ថុដូចគ្នា។ ម៉ាស៊ីន A_1 ផលិតបាន 50%
A_2 ផលិតបាន 30% និង A_3 ផលិតបាន 20% ។ គេដឹងថាវត្ថុដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីន A_1 មានខូច 3%
A_2 មានខូច 4% និងម៉ាស៊ីនទី A_3 មានខូច 4% ។
រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលមានវត្ថុខូច។
ចម្លើយ
តាង A_i ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលម៉ាស៊ីន A_1 , A_2 និង A_3 ផលិតវត្ថុរៀងគ្នា
B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលវត្ថុខូច
តាមទ្រឹស្តីបទនៃប្រូបាប៊ីលីតេសរុប

$$P(B)=P(A_1)\times P(B/A_1)+P(A_2)\times P(B/A_2)+P(A_3)\times P(B/A_3)$$

សម្មតិកម្ម $P(A_1)=0.50$, $P(A_2)=0.30$, $P(A_3)=0.20$

$P(B/A_1)=0.30$, $P(B/A_2)=0.04$, $P(B/A_3)=0.04$

ដូចនេះ $P(B)=(0.50)(0.30)+(0.30)(0.04)+(0.20)(0.04)=0.035$

១.៧ ទ្រឹស្តបទបាយេស(Bayes Theorem)

ទ្រឹស្តីបទបាយេស៖ បើព្រឹត្តិការណ៍ $(A_i)_{i\in N}$ ជាបំណែកមួយននៃសកល Ω ដែល $P(A_i)\neq 0,\forall i\in I$
នោះចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ B មួយនៃសាកល Ω ដែល $P(B)\neq 0$ គេបាន

$$P(A_{i_k}/B)=\frac{P(A_{i_k}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_{i_k})\times P(B/A_{i_k})}{\sum_{i\in I}P(A_i)\cdot P(B/A_i)}$$

ឧទាហរណ៍៖ រោងចក្រមួយមានម៉ាស៊ីនផលិតបី។ ម៉ាស៊ីន M_1 ផលិត 30% នៃផលិតផលសរុបប្រចាំថ្ងៃ
ហើយម៉ាស៊ីន M_2 និង 25% M_3 និង 45% រៀងគ្នា។ ឧបមាថាម៉ាស៊ីន M_1 , M_2 , M_3 ផលិតខូច
2% , 3% , 4% រៀងគ្នា។ ក្នុងមួយថ្ងៃៗ បើផលិតផលមួយបានត្រូវបានជ្រើសដោយចៃដន្យ ហើយជា
ផលិតផលខូច ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលផលិតផលខូចនោះកើតឡើងដោយម៉ាស៊ីន M_1 ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលផលិតផលខូចនោះកើតឡើងដោយម៉ាស៊ីន M_1

តាង A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលជ្រើសរើសបានផលិតផលដោយម៉ាស៊ីន M_1

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលផលិតផលជ្រើសរើសបានផលិតផលខូច

សម្មតិកម្ម $P(A_1)=0.3, P(A_2)=0.25, P(A_3)=0.45$

$P(B/A_1)=0.02, P(B/A_2)=0.03, P(B/A_3)=0.45$

ទ្រឹស្តីបទ Bayes

គេបាន $P(A_1/B)=\dfrac{P(B/A_1)\times P(A_1)}{P(B/A_1)\times P(A_1)+P(B/A_2)\times P(A_2)+P(B/A_3)\times P(A_3)}$

$$=\frac{(0.3)(0.02)}{(0.3)(0.02)+(0.25)(0.03)+(0.45)(0.04)}$$

$$=0.19$$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ីលីតេដែលផលិតផលខូចនោះកើតឡើងដោយម៉ាស៊ីន M_1 គឺ $P(A_1/B)=0.19$ ។

លំហាត់

១. ផ្សារទំនើបមួយបាននាំចូលក្រូច ពីអាមេរិច និងពីចិន។ក្នុងនោះ 65% មកពីអាមេរិចនិង 35% មកពីចិន។ បទពិសោធបង្ហាញថា 2% ក្រូចមកពីអាមេរិចនិង 6% ក្រូចមកពីចិន មានរសជាតិជូរ។

ក.រកប្រូបាបប៊ីលីតេ ដែលក្រូចនាំចូលមានរសជាតិជូរ។

ខ.រកប្រូបាបប៊ីលីតេ ដែលក្រូចមកពីអាមេរិច ហើយមានរសជាតិជូរ។

២. ក្នុងសំណុំសាកលមួយមាន បុរស 60% និងស្ត្រី 40% ។ក្នុងចំណោមបុរសមាន 70% ជាអ្នកជក់បារី និងក្នុងចំណោមស្ត្រីមាន 20% ជាអ្នកជក់បារី ។ រកភាគរយអ្នកជក់បារីក្នុងសំណុំសាកល នេះ ។

៣. រោងចក្រមួយប្រើម៉ាស៊ីនបីតាងដោយ M_1, M_2, M_3 ដើម្បីដំណើរការផលិត ផលិតផលប្រភេទតែមួយ។ ក្នុងផលិតផល 100% នៃផលិតផលសរុប ម៉ាស៊ីន M_1 ផលិតបាន 40% ហើយក្នុងនោះផលិតខូចមាន 4% ម៉ាស៊ីន M_2 ផលិតបាន 25% ហើយក្នុងនោះ ផលិតខូចមាន 2% និងម៉ាស៊ីន M_3 ផលិតបាន 35% ហើយក្នុងនោះផលិតខូចមាន3% ។

ក. រកភាគរយផលិតផលខូចទាំងអស់

ខ. រកភាគរយផលិតខូច កើតចេញពីម៉ាស៊ីន M_2 ។

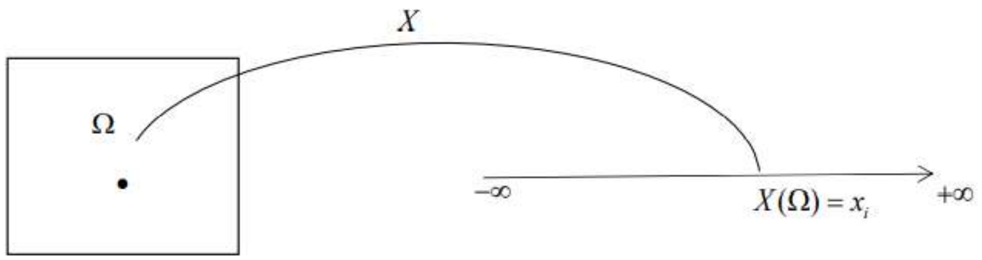
៤. ក្នុងថង់ទី I មានឃ្លីស 3 និងឃ្លីក្រហម 4 ហើយ ថងទី II មាន ឃ្លីស 5 និងក្រហម 6 ។ គេចាប់យកឃ្លីសមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលប្រើចាប់ចេញពីថង់ទី I ។

៥. ក្នុងថង់ទីI មាន ឃ្លីស 3 និងឃ្លីក្រហម 4 ហើយ ថងទី II មានឃ្លីស 5 និងក្រហម 6 ។គេ ចាប់យកឃ្លីសមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលឃ្លីចាប់ចេញពីថង់ទីI ។

២. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ(PROBABILITY DISTRIBUTION)

២.១. អថេរចៃដន្យ និង បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

និយមន័យ៖ អថេរចៃដន្យ(Random Variable) គឺជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ពីសំណុំ សកល Ω ទៅសំណុំចំនួនពិត និងតាងដោយអក្សរធំដូចជា X , Y , Z , ... ។ ចំនួនដែរថាជារូបភាពនៃអនុគមន៍ ហៅថា តម្លៃអាច (Posible Value) តាងដោយអក្សរតូច $x, y, z, ...$ ។



-បើ Ω ជាសំណុំរាប់បាន(Countable Set)នោះគេថា X ជាអថេរចៃដន្យដាច់(Discrete, Random Variable) ។

-បើ Ω ជាសំណុំរាប់មិនបាន(Uncountable Set) នោះគេថា X ជាអថេរចៃដន្យជាប់ (Continuous Random Variable) ។

២.២. អថេរចៃដន្យដាច់(Discrete Random Variable)

ចំពោះអថេរចៃដន្យដាច់ គេបង្កើតតារាងមួយដើម្បីបង្ហាញពីតម្លៃរបស់វា និងប្រូបាប៊ីលីតេដែលត្រូវ នឹងតម្លៃនីមួយៗ។តារាងនេះត្រូវបានគេហៅថាតារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ។

X	$x_1 \quad x_2 .... x_n$
P	$p_1 \quad p_2 .... p_n$

ដែល $P(X = x_k) = p_k \geq 0$ ហើយ $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ ។ $P(X = x_k)$ ត្រូវបានគេហៅថា អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃអថេរចៃដន្យ X(Probability Density Function)។

ឧទាហរណ៍៖ នៅក្នុងការពិសោធន៍នៃការបោះកាក់មួយមានមុខ H និងខ្នង T ចំនួនបីដង ។

តាង X ជាលទ្ធផលនៃការបោះកាក់ដែលចេញរូបមុខ H ។

ក. កំណត់តម្លៃរបស់អថេរចៃដន្យ X

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាបប៊ីលីតេរបស់អថេរចៃដន្យ X

ចម្លើយ

ក. $x = 0, 1, 2, 3$

ខ. $p_0 = \frac{1}{8}, \; p_1 = \frac{3}{8}, \; p_2 = \frac{3}{8}, \; p_3 = \frac{1}{8}$

ក.តម្លៃសង្ឃឹមគណិត(Expected Value)

តម្លៃសង្ឃឹមគណិតឬមធ្យម $\mu = E(X)$ របស់អថេរចៃដន្យដាច់ X កំណត់ដោយៈ

$$\mu = E(X) = \sum_{i=I} x_i \cdot p_i$$

លក្ខណៈនៃតម្លៃសង្ឃឹម(Properties of Expected Value)

ឧបមាថាមានអថេរចៃដន្យ X និង Y ហើយ a និង b ជាចំនួនថេរ គេបាន

(1). $E(a) = a$

(2). $E(aX) = aE(X)$

(3). $E(aX + b) = aE(X) + b$

(4). $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

(5). $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ បើ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា

សម្រាយៈ(ជាលំហាត់)

ខ.វ៉ារ្យ៉ង់(Variance)

វ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យដាច់ខាត X កំណត់ដោយៈ

$$\sigma^2 = V(x) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E\left[\left(X - \mu\right)^2\right]$$

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ ហៅថា **គម្លាតគំរូ**

លក្ខណៈនៃតម្លៃសង្ឃឹម(Properties of Expected Value)

ឧបមាថាមានអថេរចៃដន្យ X និង Y ហើយ a និង b ជាចំនួនថេរ គេបាន

(1). $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

(2). $V(a) = 0$

(3). $V(aX) = a^2V(X)$

(4). $V(aX + b) = a^2V(X)$

(5). $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ បើ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា

សម្រាយៈ(ជាលំហាត់)

សម្គាល់ៈ

- តម្លៃសង្ឃឹមគណិត គឺនិយាយអំពីតម្លៃមធ្យមរបស់អថេរចៃដន្យ

- វ៉ារ្យង់ គឺនិយាយអំពីភាពពង្រាយរបស់អថេរចៃដន្យ

ឧទាហរណ៍ៈ ក្នុងថង់មួយមាន ប៊ូលស 5 និងប៊ូលខ្មៅ 4 ។ គេចាប់យកប៊ូលពីរព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់ ។ តាង X ជាចំនួនប៊ូលសដែលគេចាប់បាន ។

ក. កំណត់តម្លៃអាចរបស់អថេរចៃដន្យ X

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរចៃដន្យ X

គ. គណនា $E(X)$ និង(X) ។

ចម្លើយ៖ ក. $X = 0,1,2$

ខ. $p_0 = \frac{6}{36},\ p_1 = \frac{20}{36},\ p_2 = \frac{10}{36}$

គ. $E(X) = 1.11, V(X) = 0.43$

លំហាត់ ១) ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 4 ឃ្លីពណ៌ក្រហម 3 និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅ5 ។ គេចាប់យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ឧបមាថា បើចាប់បានពណ៌ស នោះគេ ទទួលបានប្រាក់ 5000 រៀល ហើយបើយើងចាប់យកឃ្លីពណ៌ក្រហម នោះយើងខាត 5000 រៀល ។

តាង X ជាប្រាក់ចំណេញរឺខាតដែលយើងទទួលបាន។

ក. រកតម្លៃអាចនៃអថេរ X

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរ X

គ. គណនាតម្លៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យង់ នៃអថេរ X ។

២) គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរក្នុងពេលតែមួយ។ តាង X ជាផលសងនៃលទ្ធផល របស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ។

ក. រកតម្លៃអាចនៃអថេរចៃដន្យ X

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X

គ. គណនាតម្លៃសង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យង់ នៃអថេរ X ។

៣) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 5 ដែលបង់លេខពី 1 ដល់ 5 ។ គេចាប់យកប៊ូលពីរចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ តាង X ជាតំលៃធំរវាងលេខទាំងពីរ នៅលើប៊ូលដែលយើងចាប់បាន។

ក. រកបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X

ខ. គណនាតំលៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យង់នៃអថេរចៃដន្យ X ។

4) ឧបមាថាយើងបោះកាក់មួយបន្តបន្ទាប់គ្នារហូតដល់មុខផ្ការឡើង។

តាង X ជាចំនួនដងដែល យើងត្រូវបោះដើម្បីបានមុខផ្ការឡើងម្តងនេះ។

ក. ឧបមាថាកាក់ជាកាក់ស្មើសាច់(unbiased coin) ចូររកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

ខ. ឧបមាថាកាក់ជាកាក់មិនស្មើសាច់(biased coin) មានន័យថា ក្នុងការបោះមួយលើកៗ ប្រូបាបដែលចេញមុខគឺ P ចូររកបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X ។

គ. ចូរគណនាតម្លៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យង់នៃ X ក្នុងសំណួរ ខ ។

២.៣. បំណែងចែកប៊ែនូយី (Bemoulli Distribution)

ក. និយមន័យ

ឧបមាថា គេធ្វើពិសោធមួយដោយចៃដន្យ ដែល

- ការពិសោធនេះធ្វើឡើងតែមួយដង
- ក្នុងពិសោធនេះ យើងសិក្សាតែព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើង(ជោគជ័យ) និងព្រឹត្តិការណ៍មិនកើតឡើង (បរាជ័យ) ដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេ (p) និង $(1-p)$ រៀងគ្នា ។

ការពិសោធនេះ ហៅថា ការពិសោធប៊ែនូយី ។បើអថេរចៃដន្យ X តាងឱ្យចំនួនដងនៃព្រឹត្តិការណ៍ជោគជ័យ នោះ X ហៅថា អថេរចៃដន្យប៊ែនូយី(Bemoulli Random Variable)

តាងដោយ $B(1,p)$ ហើយតម្លៃអាចនៃអថេរចៃដន្យ $X=0,1$ ។

តារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យប៊ីនូយី X មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ p

X	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

ខ. សង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យ៉ង់(Expected Value Variance)

រូបមន្ត

បើ X ជាអថេរចៃដន្យប៊ែនូយី $X-B(1,p)$ នោះ

$(1).\ E(X)=p$

$(2).\ V(X)=p(1-p)$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

២.៤. បំណែងចែកទ្វេធា(Binomial Distribution)

ក.និយមន័យ

ក្នុងពិសោធចៃដន្យមួយដែល

- ធ្វើឡើងចំនួន n ដង
- ក្នុងពិសោធនីមួយៗ យើងសិក្សាតែព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើង(ជោគជ័យ)និងព្រឹត្តិការណ៍មិនកើតឡើង (បរាជ័យ)
- ប្រូបាប៊ីលីតេជោគជ័យ(p)និងបរាជ័យ$(1-p)$មិនផ្លាស់ប្តូរពីការពិសោធនីមួយៗ
- ការពិសោធនចៃដន្យទាំងអស់មិនអាស្រ័យគ្នាទេ

គេហៅការពិសោធនេះថា បំណែងចែកទ្វេធា ។ បើអថេរចៃដន្យ X តាំងឱ្យចំនួនដងជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងពិសោធននេះ នោះ

X ហៅថា អថេរចៃដន្យទ្វេធា (Binomial Random Variable) គេតាងដោយ $X = B(n, p)$ តម្លៃអាច នៃអថេរទ្វេធា $X = 0,1,2,...,n$ ។

រូបមន្ត

បើ x = B(n , p) នោះ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X កំណត់ដោយ

$P(X = K) = C(n , k): p^k .(l-p)^{n-k}$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ខ. សង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យ៉ង់

បើ X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា X – B(n , p) នោះ

(l). E(X)= n p

(2). V(X)= n p(l-p)

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ទ្រឹស្តីបទ

បើ x_1 និង X_2 ជាពីរអថេរចៃដន្យទ្វេធាមិនអាស្រ័យគ្នា ដែល X1 ~ B(n1 , p) និង

X_2 ~ B(n_2 , p) នោះ X1 + X2 ក៏ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធាដែរ ដែល X, + X, ~ B(n1 +n2, p) ។

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

សំគាល់៖ បើ $(X)_{1sick}$ ជា K គ្រួសារនៃអថេរចៃដន្យទេរជាមិនអាស្រ័យគ្នា ដែលមាន បំណែងចែករៀងគ្នា $B(n_{1,} p)$ នោះ $\sum_{i=1}^{k} X_i$ ក៏ជាអថេរចៃដន្យទេរជា ហើយមានបំណែងចែក $B(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)$

ឧទាហរណ៍៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ត្រូវបានបោះចំនួន8ដង ។

រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលបោះបានលេខ5

ក. ចំនួន 2 ដង ខ. ចំនួន7 ដង គ. យ៉ាងតិច 1ដង ឃ.គណនាមធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់

ចម្លើយ៖ ក. 0.26 ខ. 000024 គ 0.77

ឧទាហរណ៍៖ បន្ទាប់ពីការបោះឆ្នោតកន្លងមក គេសង្កេតឃើញថាសមាមាត្រអ្នកគាំទ្រគណៈបក្ស A ស្មើ 60% ។ ឧបមាថា មុនពេលពេលបោះឆ្នោតគេជ្រើសរើស អ្នកបោះឆ្នោត ចំនួនរនាក់ដើម្បីស្ទង់មតិបង្កើតជាគំរូចៃដន្យ។តាង X ជាចំនួនអ្នកគាំទ្រគណៈបក្ស A ។

ក. គណនាបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X

ខ. គណនាមធ្យម និង គម្លាតគំរូនៃអថេរចៃដន្យ X

គ. គណនាប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលមានអ្នកគាំទ្រគណៈបក្ស A យ៉ាងតិច 3នាក់គត់ ។

ចម្លើយ៖ ក. $P = 0.010$, $R = 0.077$, $P = 0.230$, $P = 0.346$, $P = 0.259$, $P(X = 5) = 0.078$

ខ. $F(X) = 3$, $(X) = 1.10$

គ. $P(X > 3) = 0.683$

២.៥. បំណែងចែកធរណីមាត្រ (Geometric Distribution)

ក. និយមន័យ

ឧបមាថា គេបោះកាក់មួយមានមុខ H និង T ។ គេប្រាថ្នាបោះឱ្យបានមុខ H មួយទើបឈប់។ តាង X ជាដងដែលនៃការបោះកាក់ ដើម្បីទទួលបានមុខ H មួយ នោះ X ជាអថេរចៃដន្យធរណីមាត្រ និងមាន ប្រូបាប៊ីលីតេ $\frac{1}{2}$ ហើយតម្លៃអាចនៃអថេរចៃដន្យ

X = 1,2...n,...។ តាងដោយ X␣ G(0.5) ។

ជាទូទៅ៖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យធរណីមាត្រ មានបំណែងចែក G(p) ហើយ X = 1, 2,...n,... នោះ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃបំណែងចែកធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$ ។

ខ. សង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យ៉ង់

គេឱ្យ X - G(p) នោះ $E(X)=\frac{1}{p}$ និង $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ ឧបមាថាប្តីប្រពន្ធមួយគូទើបរៀបការថ្មីថ្មោង ហើយគាត់បានសន្យានឹងគ្នាថា គាត់ នឹងបន្តយកកូនរហូតបានកូនស្រីម្នាក់ទើបគាត់ឈប់យកកូន។ ឧបមាថាក្នុងការសម្រាលមួយ លើកៗ ប្របាបនៃការសម្រាលបានកូនប្រុសគឺ 0.75។

ក. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលគាត់ត្រូវសំរាល5ដង

ខ. គណនា E(X) និង (X) ។

ចម្លើយ៖

ក. $P_0=\frac{1}{32},P_1=\frac{5}{32},P_2=\frac{10}{32},P_3=\frac{10}{32},P_4\frac{5}{32},P_5=\frac{1}{32}$

ខ. $E(X)=2.5,V(X)=1.25$

លំហាត់៖ ១) បុរសម្នាក់ចូលលេងល្បែងក្នុងកាស៊ីណូមួយ ហើយគាត់បានសន្យានឹងខ្លួនគាត់ថា គាត់នឹងបន្តលេងល្បែងរហូតបានឈ្នះមួយលើកទើបគាត់ឈប់លេង ។ ឧបមាថាក្នុងការលេងមួយ លើកប្រូបាបនៃការឈ្នះគឺ 35% ។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវលេង 4 ដង

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវលេងយ៉ាងហោច 2 ដង

គ. គណនាមធ្យម និង វារ្យ៉ង់

២) កីឡាករបាល់បោះម្នាក់ គាត់ចង់បោះបាល់រហូតបានចូលមួយគ្រាប់ទើបគាត់ឈប់ បោះ។ ឧបមាថាក្នុងការបោះមួយលើកៗឱកាសនៃការបោះចូលស្មើ 0.4 ហើយ

ឧបមាថាការបោះមួយលើកៗមិនអាស្រ័យគ្នា។

ក. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលគាត់បោះតែម្តង

ខ. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលគាត់បោះយ៉ាងហោច 3 ដង

គ. គណនា មធ្យម និង វ៉ារ្យ៉ង់ ។

៣) គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យមួយ មានបំណែងចែកធរណីមាត្រជាមួយនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ P=40%។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$

ខ. គណនា មធ្យម និង វ៉ារ្យ៉ង់នៃអថេរចៃដន្យ X ។

៤) បុរសម្នាក់បោះកាក់មិនស្មើសាច់មានមុខ H និង ខ្នង T រហូតដល់បានខ្នង T ។ ឧបមាថាក្នុងការបោះមួយលើកៗឱកាសនៃការចេញមុខស្មើ 0.40។

ក. តើគាត់ត្រូវបោះជាមធ្យមប៉ុន្មានដង ?

ខ. រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលគាត់ត្រូវបោះចំនួន 4 ដង ។

២.៦. បំណែងចែកអ៊ីពែធរណីមាត្រ (Hypergeometric Distribution)

ក. និយមន័យ

ឧបមាថានៅក្នុងថង់មួយមាន ឃ្លីព័ណស 4 និង ឃ្លីព័ណខ្មៅ។ យើងចាប់យកប្តីព្រមគ្នា ចេញពី ថង់ដោយចៃដន្យ ។ តាង X ជាចំនួនឃ្លីសដែលចាប់បាន។ គេថា X ជាអថេរចៃដន្យមាន បំណែង ចែកអ៊ីពែធរណីមាត្រ តាងដោយ HG (9 , 4 , 3) ។

យើងបាន ប្រូបាប៊ីលីតេដែលចាប់បានឃ្លីព័ណសពីរគឺ

$$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{6\times 5}{7\times 4\times 3}=\frac{5}{14}$$

ជាទូទៅ៖ ក្នុងលំហΩមួយមាន N ដែលក្នុងនោះមាន M ប្រភេទទី១ និង N – M ប្រភេទទី២។ បើគេជ្រើសរើសរាជាតុពីក្នុងលំហΩដែលn < N ហើយ X ជាចំនួនជាតុប្រភេទទី១ដែលជ្រើសបាន នោះ X ជាអថេរចៃដន្យអ៊ីពែរធរណីមាត្រ ដែលតាងដោយ HG(N , M , n)ហើយតម្លៃអាចអថេរចៃដន្យ X = 0 , 1, 2, ... k ហើយមានប្រូបាប៊ីលីតេ

$$P(X=k)=\frac{C_M^k\times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad P(X=k)=\frac{C_M^k\times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

ខ. សង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យ៉ង់

គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យអ៊ីពែរធរណីមាត្រ ដែលមានបំណែងចែក HG(N , M , n)គេបាន

(1). $E(X)=np$ ឬ $E(X)=\frac{n.M}{N}$

(2). $V(X)=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ ឬ $V(X)=\frac{n.M(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$

ស្រាយ៖ (ទុកជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌សៗ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ។ គេចាប់យកឃ្លីព្រមគ្នា ចេញថង់ដោយចៃដន្យ។ តាង X ជាចំនួនប្រើស ដែលយើងចាប់បាន។

ក. កំណត់តម្លៃអាចរបស់អថេរ X

ខ. បង្កើតតារាងបំណែងចែកប្របាប៊ីលីតេនៃអថេរ X

គ. គណនា តម្លៃសង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យង់នៃអថេរ X ។

ចម្លើយ៖ ក. X = 0 , 1, 2, 3

ខ. $P_0 = \frac{2}{44}, P_1 = \frac{14}{44}, p_2 = \frac{21}{44}, P_3 = \frac{7}{44}$

គ. $E(X) = 1.75, V(X) = 0.60$

លំហាត់៖ ១)ក្នុងសង្កាត់មួយមានរៀបចំការបោះឆ្នោតរើសចៅសង្កាត់ ដែលក្នុងនោះមានពីរគណ បក្សគឺគណៈបក្ស A និង B ហើយប្រជាជនដែលមានសិទ្ធិទៅបោះឆ្នោតមានចំនួន 1500 នាក់។តាមបទពិសោធន៍កន្លងមក មានប្រជាជន 60% ដែលបានបោះឆ្នោតឲ្យគណៈបក្ស A ។ ដើម្បីធ្វើការស្ទង់លទ្ធផលនៃការបោះឆ្នោតនេះ បានជ្រើសរើសយកមនុស្សចំនួន 50 នាក់ដោយចៃដន្យ មកសាកសួរថាតើគណៈបក្សណាដែលម្នាក់ៗចូលចិត្ត។ រកប្រូបាបដែលក្នុងចំណោម 50នាក់ នេះមាន 28 នាក់បោះឆ្នោតឲ្យគណៈបក្ស 50នាក់។

២) ក្នុងក្រុមមួយមានមនុស្ស ប្រុស 6 នាក់ និង មនុស្សស្រី នាក់។ គេជ្រើសរើស មនុស្ស4 នាក់ព្រមគ្នាចេញពីមនុស្សមួយក្រុមនេះ ដើម្បីបង្កើតជាគណៈកម្មការមួយ។រកប្រូបាបដែលក្នុងគណៈកម្មការនេះមានមនុស្សប្រុស 2នាក់។ តើគេសង្ឃឹមថានឹងមានមនុស្សប្រុសប៉ុន្មាននាក់នៅក្នុងគណៈកម្មការនេះ។

៣) ខ្សែផលិតផលមួយផលិតបាន 100 ផលិតផល ហើយមានខូច 2% ។ភ្នាក់ងារត្រួតពិនិត្យពុំស្គាល់តួលេខនេះឡើយក៏ជ្រើសរើសគំរូចៃដន្យមួយមាន 10 ផលិតផលព្រមគ្នាមកធ្វើការវាយតម្លៃគុណភាពផលិត ។ តាង X ជាចំនួនផលិតផលខូចដែលជ្រើសបាន ។

ក. គណនាបំណែងចែកប្របាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X

ខ. គណនាប្របាប៊ីលីតេ ដែលក្នុងគំរូនេះមានផលិតផលខូចចំនួន 2

គ. គណនាមធ្យម និង គំលាតគំរូនៃអថេរចៃដន្យ X ។

ចម្លើយ៖ ក. P = 0.809 , R = 0.182 , P = 0.009

ខ. P(2) = 0.009

គ. F(X)=2 , ច(X)=14

២.៧. បំណែងចែកព័រសុង(Poisson Distribution)

ក. និយមន័យ

យើងបានសិក្សារួចមកហើយចំពោះអថេរទ្វេធាគឺជាអថេរមួយដែលរាប់ចំនួនជោគជ័យតាម ការពិសោធន៍ចៃដន្យ ។ ឥឡូវនេះ យើងនឹងសិក្សានូវអថេរមួយទៀតដែលរាប់ចំនួនជោគជ័យកើត ឡើងក្នុងចន្លោះតូចៗនៃពេលដែលបំបែកចេញពីរយៈពេលសរុបប្រើពិសោធន៍។ អថេរចៃដន្យ ប្រភេទនេះ ហៅថា អថេរព័រសុង ។

ឧទាហរណ៍៖ ការសិក្សាចំនួនដងដែលអតិថិជនប្រើប្រាស់ទូរស័ព្ទក្នុងរយៈពេលមួយការ រាប់ចំនួនដងដែលម៉ាស៊ីនខូចក្នុងរយៈពេលមួយ....។ល។

សម្មតកម្មនៃអថេរព័សុង

1). ចំនួនជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលដ៏តូចមួយ មិន អាស្រ័យនឹងចំនួនជងជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលផ្សេងទឡើយ

2). ប្របាប៊ីលីតេជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងក្នុងពេលផ្សេងគ្នា មានតម្លៃថេរស្មើគ្នា

3). ប្របាប៊ីលីតេជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាមាត្រនឹងពេលមានន័យថា ប្រូបាប៊ីលីតេធំ កាលណាចន្លោះពេលច្រើន ហើយប្របាប៊ីលីតេតូច កាលណា ចន្លោះពេលតិច

4). ប្របាប៊ីលីតេដែលនាំឱ្យជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលត្រូវខិត ទៅរកសូន្យ ។

និយមន័យ៖ បើ X តាងឱ្យចំនួនជងជោគជ័យនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយដែលកើតឡើងក្នុងរយៈ ពេល T មួយនោះ X ហៅថា អថេរចៃដន្យព័សុង (Poisson Random Variable) តាងដោយ Po(u) ដែលu > 0 ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ហើយតម្លៃអថេរ $X = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ ។

សម្គាល់៖ បើចន្លោះពេលតូចៗ ជាការពិសោធចៃដន្យមួយ នោះអថេរព័សុង ទៅជាអថេរទ្វេជា។ ដូចនេះគេអាចសន្និដ្ឋានបានថា អថេរព័សុង និងជាអថេរទ្វេជានៅជិតគ្នា។

រូបមន្តបំណែងចែកព័សុង

បើ X ជាអថេរចៃដន្យព័សុងមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\mu > 0$ នោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេគឺ

$po(X=k)=\dfrac{e^{-\mu}\cdot\mu^{k}}{k!}$ ដែល $\mu = p\cdot T > 0$ និង $k = 0,1,2,\ldots,n,\ldots$

ខ. សង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យ៉ង់

បើ $X - Po(\mu)$ នោះ $E(X) = V(X) = \mu$

សម្គាល់៖ បំណែកចែកទ្វេធា វាយតម្លៃប្រហែលដោយបំណែងចែកព័សុង

ក្នុងបំណែងចែកទ្វេជា បើចំនួនការពិសោធចៃដន្យកាន់តែធំនោះការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេជាលេខមានការ លំបាក។ គេតែងតែគណនាដោយប្រើបំណែងចែកព័សុងជំនួស។

គេអាចធ្វើបែបនេះបានដោយសារ $X = B(n,p) \to X = Po(\mu)$ ពេល $n \to \infty, p \to 0$ ព្រោះ៖ (ជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ ក្រុមហ៊ុនទូរស័ព្ទមួយបាន អង្កេតពីការភ្ជាប់ការទាក់ទងទូរស័ព្ទរបស់អតិថិជន ទៅស្តង់ដានៃក្រុមហ៊ុនរបស់ខ្លួន។ ក្នុង 1 វិនាទី ប្រូបាប៊ីលីតេដែលនាំឲ្យមានអតិថិជនភ្ជាប់ទូរស័ព្ទស្មើនឹង 0.05។ តាង X ជាចំនួនការភ្ជាក្នុរយៈពេល 1 នាទី។

ក. កំណត់បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរ X

ខ.គណនា $E(X)$ និង $V(X)$ ។

ចម្លើយ៖ ក. $P(X=k)=\dfrac{e^{3}3^{k}}{k!}, k=0,1,2,\ldots\ldots$

ខ. $E(X)=3, V(X)=3$

ឧទាហរណ៍៖ អ្នកគ្រប់គ្រងហាងទំនិញមួយ បានពិនិត្យបញ្ជីឃើញអ្នកគិតលុយម្នាក់គិតបាន 360 នាក់ ជាមធ្យមក្នុងមួយម៉ោង។

ក. គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកគិតលុយម្នាក់នោមានអតិថិជន 2 នាក់ក្នុងមួយនាទី

ខ. គណនាប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលអ្នកគិតលុយម្នាក់នោះមានអតិថិជនយ៉ាងតិច 2 នាក់ក្នុងមួយនាទី។

ចម្លើយ៖ ក. 0.0446 ខ.0. 0.9380

ឧទាហរណ៍៖ក្រុមហ៊ុនដឹកជញ្ជូនមួយមានរថយន្តចំនួន 200 សម្រាប់ដឹកជញ្ជូន។ប្រូបាប៊ីលីតេដែល នាំឲ្យរថយន្តនីមួយៗខូចក្នុងមួយថ្ងៃស្មើ 0.02។ គណនាប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលនាំឲ្យគ្មានរថយន្តខូចក្នុង មួយថ្ងៃ។

ចម្លើយ៖ 0.0183។

លំហាត់៖១) តាង X ជាចំនួនកំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធដែលកើតមាននៅក្នុងទំព័រនីមួយៗនៃសៀវភៅមួយ។ ឧបមាថា X មានបំណែង មានបំណែងចែកព័រសុង ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\mu = 45\%$ ។

ក. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលកំហសអក្ខរាវិរុទ្ធកើតមានឡើងចំនួន 5 ដង

ខ. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលកំហសអក្ខរាវិរុទ្ធកើតមានឡើងយ៉ាងតិចម្តង។

២) តាង X ជាចំនួនដងនៃការរញ្ជួយដីដែល កើតឡើងនៅលើកោះមួយក្នុងរយៈពេល 2 សប្តាហ៍។ ឧបមាថា X មានបំណែងចែកព័រសុង ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\mu = 2$ ។

ក. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលរំញ្ជួយដីកើតឡើងចំនួន3ដងក្នុងរយៈពេលពីរសប្តាហ៍

ខ. រកបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ នៃរយៈពេលចាប់ពីឥឡូវរហូតដល់រំញ្ជួយដីលើកបន្ទាប់។

៣) តាង X ជាចំនួននៃតំណក់ទឹកភ្លៀងដែលស្រក់ចូលក្នុងពាងរយៈពេល 5 វិនាទី ជាមួយនឹងមធ្យម 20 ។ រកប្រូបាបដែល $P(X = 20)$ ។

៤) គេឲ្យ X មានបំណែចែកព័រសុង ដែល $P(X = 4) = P(X = 5)$ ។ចូររក $P(X)$ ។

៥) ឧបមាថា X មានបំណែងចែកព័រសង ជាមួយនឹងមធ្យម 2។ ចូររក $P(X)$ និង $P(X \geq 1)$ ។

២.៨. បំណែងចែក Negative Binomail (Negative Binomail Distribution)

បុរសម្នាក់បានធ្វើការបោះកាក់មួយដែលមានមុខ H និង ខ្នង T ។ គាត់ប្រាថ្នាបោះឲ្យបានមុខ H ចំនួនបីទើបឈប់បោះ។ យើងសង្កេតឃើញថាៈ

១. ការបោះនីមួយៗមិនអាស្រ័យគ្នាទេ

២. លទ្ធផលទទួលបានមានតែ មុខ H ឬ T ខ្នង តែប៉ុណ្ណោះ

៣. ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការបោះម្តងៗមានតម្លៃថេរស្មើ $\frac{1}{2}$

៤.ការបោះនេះចប់នៅពេលទទួលបានមុខ H ចំនួនបីដង។ គេហៅការពិសោធនេះថាជា បំណែងចែក Negative Binomail ។ បើ X តាងឲ្យចំនួនដងនៃការបោះកាក់រហូតទទួលបានមុខ H ចំនួនបីដង នោះគេថា អថេរចៃដន្យ X មានបំណែងចែក Negative Binomail

តាងដោយ $NB(3\ ,0.5)$ ហើយតម្លៃអថេរ $X=0,1,2,.......$ ។ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃបំណែងចែកនេះគឺ

$P(X=3)=NB(10\ ,3\ ,0.5)=C_{10+3-1}^{3-1}(0.5)^3(1-0.5)^{11}=C_{12}^2(0.5)^{13}\frac{33}{4096}$ ។

ជាទូទៅ៖ អថេរចៃដន្យទ្វេធា Negative និងបំណែងចែក នៃពិសោធមួយផ្ទៀងផ្ទាត់ដូច លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

១.ការកើតឡើងនៃពិសោធនីមួយៗមិនអាស្រ័យគ្នាទេ

២. ព្រឹត្តិការណ៍ដែលទទួលបានមានតែ ជោគជ័យ និង បរាជ័យ

៣. ប្រូបាប៊ីលីតេជោគជ័យនៃពិសោធនីមួយៗ មានតម្លៃថេរស្មើៗគ្នាគឺ p

៤. ការធ្វើពិសោធបន្តរហូតដល់គេទទួលបានលទ្ធផលជោគជ័យ ដងដែលគេចង់បាន។

បើ X ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែងចែកទ្វេធា Negative មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ r

គេតាងដោយ $NB(k,r,p)=P(X=k)$ ដែលតម្លៃអាចអថេរ $X=0,1,2,........$ ហើយមានប្រូបាប៊ីលីតេ

កំណត់ដោយ $NB(k,r,p)=P(X=k)=C_{k+r-1}^{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^k$ ដែល $k=0,1,2,........$

ក. សង្ឃឹមគណិត និង វ៉ារ្យ៉ង់

បើ X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា Negative ដែល $X-NB(k,r,p)$ នោះ $E(X)=\frac{r(1-p)}{p}$

និង $V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$

លំហាត់៖ ១)ឧមាថាចូលលេងល្បែងក្នុងកាស៊ីណូមួយ ហើយគាត់បានសន្យានឹងខ្លួនគាត់ថា គាត់នឹងបន្តលេង ល្បែងរហូតបានឈ្នះមួយលើកទើបគាត់ឈប់លេង។ ឧបមាថាក្នុងការលើក ប្រូបាបនៃការឈ្នះគឺ $p=0.45$ ។

ក. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលគាត់ត្រូវលេងចំនួន ៥ដង

ខ. រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលគាត់ត្រូវលេងយ៉ាងហោច ៣ដង

គ. គណនាមធ្យម និង វ៉ារ្យ៉ង់ នៃបំណែងចែកខាងលើ។

២) គេឲ្យ X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែកទ្វេធា ជាមួយប៉ារ៉ាម៉ែត្រ p ។ចូរគណនា $E(X')$ ។

២.៩. អថេរចៃដន្យជាប់

និយមន័យ៖ អថេរចៃដន្យជាប់ គឺជាអថេរមួយដែមិនអាចរាប់បាន។ ក្នុងមេរៀននេះ យើងសិក្សាអថេរចៃដន្យជាប់លើសំណុំ ពិត ។

ក. អនុគមន៍របាយណ៍ និង អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

និយមន័យ៖ អថេរចៃដន្យជាប់ X មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f លុះត្រាតែ មានអនុគមន៍របាយណ៍ F អាចសរសេរជាទម្រង់ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ អនុគមន៍ចំនួនពិត កំណត់លើ គឺជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេលុះត្រាតែ

១. f ជាអនុមន៍ជាប់លើ

២. $f(x) \ge 0, \forall x \in$

៣. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ឧទាហរណ៍៖ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ ដោយ $f(x) = \begin{cases} \cos x \ , \ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 \ , \ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុគន៍ដង់ស៊ីតេ

ខ. រកអនុគមន៍របាយណ៍ F នៃអថេរចៃដន្យជាប់ខាងលើ។

គ. ប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យជាប់

គេឲ្យ X ជាអថេរចៃដន្យជាប់មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f ហើយ a និង b ជាពីរចំនួនពិតដែល $a \le b$ **គេបាន៖**

$$1. P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)$$

$$2. P(X = a) = 0$$

$$3. P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

$$4. P(X \ge a) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$5. P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

សម្គាល់៖ ១. $P(X \ge a) = 1 - P(X \le a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

២. $F(x) = P(x \le x)$ ដែល F ជាអនុគមន៍របាយណ៍នៃ X

ឧទាហរណ៍៖ គេឲ្យ X ជាអថេចៃដន្យជាប់ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f ។ រកអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃអថេរខាងក្រោម ក. $Y = X^2$ ខ. $Y = e^X$

ខ. សង្ឃឹមគណិតនៃអថេរចៃដន្យជាប់

និយមន័យ៖ គេឲ្យ X ជាអថេរចៃដន្យជាប់មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f នោះសង្ឃឹមគណិតនៃ អថេរកំណត់ដោយ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

ឧទាហរណ៍៖ គេឲ្យ X ជាអថេរចៃដន្យជាប់មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f កំណត់លើ ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \ , \ x \in \left[0 \ , \ \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 \qquad , \ x \notin \left[0 \ , \ \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

រកសង្ឃឹមគណិតនៃអថេរចៃដន្យ X ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ។

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

ខ. តើអថេរចៃដន្យជាប់ X ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f មានតម្លៃសង្ឃឹមគណិតឬទេ ?

លក្ខណៈនៃសង្ឃឹមគណិត

គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យជាប់មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f ហើយ a និង b ជាពីរចំនួនពិត ដែល $a\neq 0$

គេបាន (1). $E(aX+b)=aE(X)+b$ (2). $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

គ. វ៉ារ្យ៉ង់

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យមាន អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f និងតម្លៃសង្ឃឹមគណិត $E(X)$ ។

វ៉ារ្យ៉ង់ $V(X)$ មានតម្លៃ កាលណា $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x+E(X)\right]^2\cdot f(x)dx$ រួម ហើយ

$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x+E(X)\right]^2\cdot f(x)dx$ និងគម្លាតស្តង់ដា $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

ឧទាហរណ៍៖ គេអនុគមន៍ f កំណត់ ដោយ $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x^5} & , x\geq 1\\ 0 & , x<1\end{cases}$

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

ខ. គណនាសង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យ៉ង់អថេរខាងលើ ។

លក្ខណៈនៃវ៉ារ្យ៉ង់

គេគេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យជាប់ដែលមានតម្លៃសង្ឃឹមគណិត $E(X)$ ហើយ a និង b ជាពីរចំនួនពិត ដែល $a\neq 0$ គេបាន៖

(1). $V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

(2). $V(aX+b)=a^2V(X)$ និង $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

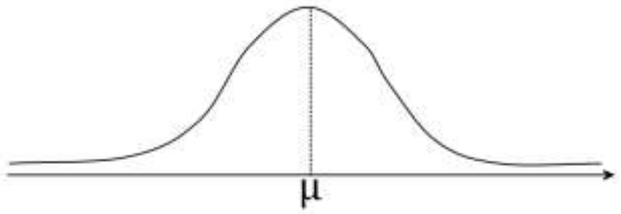
ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

២.១០ បំណែងចែកណ័រម៉ាល់ (Normal Distribution)

និយមន័យ១៖ អថេរចៃដន្យជាប់ X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ μ និង σ (ឬ μ និង σ^2) ដែល $-\infty<\mu<+\infty$ និង $\sigma>0$ លុះត្រាតែ X មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sigma}{\sigma}\right)^2}$ X ហៅថា អថេរចៃដន្យណ័រម៉ាល់(Normal Random Variable)

តាងដោយ $N(\mu,\sigma)$ ។ $X \sim N(\mu,\sigma)$ អានថា X មានបំណែកចែកណ័រម៉ាល់ ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ μ និង σ ។



ជាការពិតណាស់ $f(X,\mu,\sigma)\geq 0$ និង $\int_{-\infty} f(x,\mu,\sigma)dx = 1$

ក. សង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យ៉ង់

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យណ័ម៉ាល់មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sigma}{\sigma}\right)^2}$ នោះ $E(X) = \mu$ និង $V(X) = \sigma^2$ ។

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

សម្គាល់៖ តាង F ជាអនុគមន៍របាយណ៍

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sigma}{\sigma}\right)^2} \text{ ហើយ } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

គេបាន៖ ១) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $x = \mu$ ហើយចំណុចឆ្លុះគ្នាមានអាប់ស៊ីសមានទម្រង់ $\mu - \sigma$ និង $\mu + \sigma$

២) ក្រាបនៃអនុគមន៍របាយណ៍ F កាត់តាមចំណុចជាផ្ចិតឆ្លុះដែលមានអាប់ស៊ីស $x = \mu$ និងចំណុចឆ្លុះ $\left(\mu, \frac{1}{2}\right)$ ហើយត្រង់ចំណុចនេះមានបន្ទាត់ប៉ះរួមដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស $m = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ។

និយមន័យ២៖ តាមនិយមន័យ១ បើគេតាង $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ នោះអថេរចៃដន្យជាប់ Z ហៅថា អថេរចៃដន្យមានបំណែងណ័ម៉ាល់ស្តង់ដា (Standard Normal Distribution) ហើយមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ កំណត់ដោយ $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{R}$ ។ ហើយ អថេរចៃដន្យជាប់ Z តាងដោយ $Z = N(0,1)$ ។

គេតាងអនុគមន៍របាយណ៍នៃអថេរចៃដន្យស្តង់ដាណ័រម៉ាល់ដោយ $\varphi(z) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{z^2}{2}} dt$

លក្ខណៈទី១៖ បើ φ ជាអនុគមន៍នៃបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ $N(0,1)$ នោះ $\varphi(-x) = 1 - \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}$

លក្ខណៈទី២៖ បើ F និង φ ជាពីរអនុគមន៍របាយណ៍នៃបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ $N(\mu,\sigma)$ និង $N(0,1)$ រៀងគ្នា នោះ $F(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ក្រាបនៃអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ ហៅថា ខ្សែកោងណ័រម៉ាល់ ឬ ខ្សែកោងហ្គោល (Gauss) ។អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ ត្រូវបានរកឃើញដោយលោក Karl Friederich Gauss (1777-1855) ជាគណិតវិទូជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ ។ មានបំណែងចែកជាច្រើនប្រើក្នុងស្ថិតិដូចជា បំណែងចែកស្ទូដិន(Student Distribution) បំណែងចែកឈីការេ (Chi-square Distribution) បំណែងចែក F (F-Distribution) មាននិយមន័យជាច្រើនចេញពីបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ ។ ម្យ៉ាងទៀតមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាច្រើនដូចជា បំណែងចែកទ្វេធា បំណែកចែកព័រសុង អាចវាយតម្លៃប្រហែល (Approximation) ដោយបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោងណ័រម៉ាល់ស្តង់ដា ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

ក. $0 \le Z \le 1.2$	ឃ. $0.81 \le Z \le 1.94$

ខ. $-0.68 \le Z \le 0$	ង. $Z \le -0.60$

គ. $-0.64 \le Z \le 2.21$	ច. $Z \ge -1.28$

ចម្លើយ៖ ក. 0.3849	ឃ. 0.1828

ខ. 0.2518	ង. 0.2743

គ. 0.6637	ច. 0.8997

ឧទាហរណ៍៖ រកតម្លៃ Z ក្នុងករណីដូចខាងក្រោម៖

ក. ផ្ទៃក្រឡាចន្លោះ 0 និង Z គឺ 0.3770

ខ. ផ្ទៃក្រឡាខាងឆ្វេង Z គឺ 0.8621។

ចម្លើយ៖ ក. $Z = \pm 1.16$	ខ. $Z = 1.09$

២.១១ វិសមភាពឆេប៊ីឆេវ (TChebychev)

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យមានមួយដែលមាន មធ្យម $E(X)$ និង $V(X)$។

គេបាន $\forall \varepsilon > 0$, $P\left(\left|X - E(X) \ge \varepsilon\right|\right) \le \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

២.១២. ច្បាប់ខ្សោយនៃចំនួនធំ

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ(X_n) គឺជាស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យដែលមិនទាក់ទងគ្នាពីរៗ ហើយមានមធ្យម μ និង វ៉ារ្យ៉ង់ σ^2 ។

តាង $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

គេបាន $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \ge \varepsilon\right) = 0$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$ ។

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

២.១៣. តម្លៃប្រហែលនៃបំណែងចែក

ក. បំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រវាយតម្លៃប្រហែលដោយបំណែងចែកទ្វេធា

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រ $HG(N , n , p)$ នោះចំពោះ

$$k \in [0,n] , \lim_{N\to+\infty} \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} , (M = Np)$$

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ខ. បំណែកចែកទ្វេធា វាយតម្លៃប្រហែលដោយបំណែងចែកព័រសុង

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រ $B(n , p)$ នោះ

ចំពោះ $k \in [0,n] , \lim_{n\to+\infty} C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^k}{k!}$ (ពេល $n \to +\infty , p \to 0 \Rightarrow np = \mu$) ។

ស្រាយ៖ (ជាលំហាត់)

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែងចែកទ្វេធា $B(40 , 0.05)$ ។

គណនាប្រូបាប៊ីលីតេ $P(X = 2)$ រួចគណនា $P(X = 2)$ តាមបំណែងចែកព័រសុង ។

គ. តម្លៃប្រហែលនៃបំណែងចែកទ្វេធាដោយបំណែងចែកណ័រម៉ាល់

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែងចែកទ្វេធា $B(n , p)$ ។

គេជំនួស $P(X = k)$ ដោយ $F(k+0.5) - F(k-0.5) = P(k-0.5 \le X \le k+0.5)$

ចំពោះ $1 \le k \le n-1$ ។

សម្គាល់៖ គេជំនួស $P(X = 0)$ ដោយ $F(0.5) = P(X \le 0.5)$

$P(X = k)$ ដោយ $1 - F(n-0.5) = P(n-0.5 \le X)$

អនុវត្ត៖ បំណែងចែកទ្វេធា $B(n , p)$ មានតម្លៃប្រហែលទៅនឹងបំណែងចែកណ័រម៉ាល់

$N\left(np , \sqrt{np(1-p)}\right)$ បើ $n \ge 30 , np \ge 15 , np(1-p) > 5$

សម្គាល់៖ បើ $X = B(n , p)$ នោះ $E(X) = np , \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

បើ $X = N(\mu , \sigma)$ នោះ $E(X) = \mu , \sigma(X) = \sigma$

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យ $X = B(40 , 0.5)$ ។ គណនាប្រូបាប៊ីលីតេខាងក្រោម រួចដោយប្រើបំណែងចែកណ័រម៉ាល់

ក. $P(X = 20)$ ខ. $P(17 \le X < 25)$

ចម្លើយ៖ ក. $P(X = 20) = F(20.5) - F(19.5) = 0.1272 , P(X = 20) = C_{40}^{20} (0.5)^{20} (0.5)^{20} = 0.1254$

ខ. $P(17 \le X < 25) = F(24.5) - F(16.5) = 0.7887$

$$P(17 \le X < 20) = \sum_{k=17}^{24} C_{40}^k (0.5)^k (0.5)^{40-k} = 0.7890$$

ឃ. តម្លៃប្រហែលនៃបំណែងចែកព័រសុង ដោយបំណែងចែកណ័រម៉ាល់

អនុវត្ត៖ បំណែងចែកព័រសុង $Po(\mu)$ មានតម្លៃប្រហែលទៅនឹងបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ $N\left(\mu , \sqrt{\mu}\right)$ បើ $(\mu \geq 15)$ ។

សម្គាល់៖ បើ $X = Po(\mu)$ នោះ $E(X) = \mu , \sigma(X) = \sqrt{\mu}$

បើ $X = N(\mu , \sigma)$ នោះ $E(X) = \mu , \sigma(X) = \sigma$

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យ $X = Po(16)$ ។ គណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរ X ដោយប្រើបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ ។

ចម្លើយ៖ $P(X = 16) = F(17.5) - F(15.5) = 0.0995$, $P(X = 16) = \dfrac{e^{-16} \cdot e^{16}}{16!} = 0.0992$

២.១៤. ទ្រឹស្តីបទលីមីតតម្លៃកណ្តាល

គេឱ្យ (X_n) ជាស៊ីតនៃអថេរចៃដន្យមួយ និងមិនអាស្រ័យគ្នា ហើយមានបំណែងចែកដូចគ្នាដែលមានមធ្យម μ និងលាតពីគ្នា σ ។ តាង $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ នោះចំពោះ n យកតម្លៃធំ ច្បាប់ $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

យកតម្លៃប្រហែលទៅនឹងបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដា $N(0,1)$ ។

សម្គាល់៖ គេសន្មត់ថា n យកតម្លៃធំ នោះ $n \geq 30$ ។

តារាងផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោងណ័រម៉ាល់ចន្លោះពី 0 ទៅ $\dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$\frac{X-\mu}{\sigma}$	0.00	0.01		0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040		.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438		.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832		.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1084	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217		.1255	.1293	.1331	.1365	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591		.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950		.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291		.2324	.2257	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611		.2642	.2671	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910		.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3073	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186		.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438		.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665		.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869		.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049		.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207		.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4232	.4335		.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463		.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564		.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649		.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4714		.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767
2.0	.4772	.4778		.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826		.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865		.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4990
2.3	.4893	.4896		.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920		.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936

2.5	.4941	.4940		.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955		.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966		.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975		.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982		.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987		.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.49903	.4991		.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993

លំហាត់បន្ថែម

១). គេឱ្យ f កំណត់ពីសំណុំ ទៅ ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ \dfrac{\lambda}{1+x^2} & ,x\geq 0\end{cases}$$

ក.រកតម្លៃពិត λ ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ។

ខ.យក X ជាអថេរចៃដន្យជាប់នៃអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f ។ រកបំណែងចែកនៃអថេរចៃដន្យ $y=\arctan X$ ។

គ.រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យសមីការអញ្ញាត $\lambda, \lambda^2+X\lambda+X=0$ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា។

២). គេឱ្យ $a>0$ និង f ជាអនុគមន៍កំណត់លើសំណុំ ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\ln x}{x^2} & ,x\in[1,a]\\ \dfrac{\lambda}{1+x^2} & ,x\notin[1,a]\end{cases}$$

ក.បង្ហាញថាចំនួនពិត a ដែល f ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X ។

ខ.គណនា $E(X)$ និង $V(X)$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

៣). គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}x^n}{n!} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$ ហើយ Y

ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែងចែកព័រសុង $Po(\mu)$ ។

បង្ហាញថា $P(Y\leq n)=P(X\geq\mu)$ ។

គំរូមេរៀនទី២ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១. សញ្ញាណនៃដេរីវេ

ឧបមាថា នៅក្នុងអង្គត់ X មួយត្រូវបានកំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$ ។ យើងយកចំណុច $x_0 \in X$ និងដាក់អថេរ x ឱ្យមានកំណើនដែល Δx ដែល $x = x_0 + \Delta x$ ក៏ស្ថិតនៅក្នុងអង្គត់ X ដែរ។ ហើយអនុគមន៍ក៏ទទួលបានកំណើន $\Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ ។

១.១. និយមន័យដេរីវេ

ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច x_0 គឺជាលីមីតនៅពេល $\Delta x \to 0$ នៃផលធៀបកំណើនអនុគមន៍ទៅនឹងកំណើនអថេរនៅក្នុងលក្ខខណ្ឌថាលីមីតនោះមាន។ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច x_0 តាងដោយ $y'(x_0)$ ឬ $f'(x_0)$ ។ តាមនិយមន័យយើងអាចសរសេរបានថា

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ត្រង់ចំណុច $x = x_0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ នៅពេលឱ្យកំណើនអថេរ x ដោយ Δx យើងបានកំណើនអថេរ x ដូចខាងក្រោម

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$
$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

ដូច្នេះ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

ដូច្នេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ត្រង់ចំណុច $x = x_0$ ស្មើចំនួន $2x_0$ ។

អត្ថន័យធរណីមាត្រនៃដេរីវេ៖ ឧបមា អនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់នៅក្នុងអង្គត់ $[a,b]$ ហើយចំណុច M ត្រូវនឹងតម្លៃ x_0 និងចំណុច P ត្រូវនឹងតម្លៃអថេរ $x_0 + \Delta x$ ។ បន្ទាត់ភ្ជាប់ពីចំណុច B ទៅចំណុច P គេហៅថាបន្ទាត់កាត់។ ហើយមុំចំណោលរបស់វាតាងដោយ $\varphi(\Delta x)$ ។

ទីតាំងលីមីតនៃបន្ទាត់កាត់ PM នៅពេល $\Delta x \to 0$ ហៅថាបន្ទាត់ប៉ះ s ទៅនឹងក្រាភិចនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច M គឺមានន័យថា $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$

តាមរយៈរូប3.1 យើងមាន $\tan\varphi(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ចេញពីនេះ

$$\varphi(\Delta x) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = f'(x_0)$$

ដូច្នេះ $\arctan f'(x_0) = \varphi_0$ ឬក៏ $f'(x_0) = \tan\varphi_0$

ដូច្នេះ ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុច x_0 គឺជាមុំចំណោល $(Slope\ \ Ratio)$ $\tan\varphi_0$ របស់បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបភិច ត្រង់ចំណុចដេរីវេ។

អត្ថន័យមេកានិចនៃដេរីវេ $(Mechanical\ \ Interpretation)$ ៖ ឧបមាថា $s(t)$ ជាអនុគមន៍ចំងាយចរដែល អង្គធាតុមួយធ្វើបាន។ ដូច្នេះបម្រែបម្រួលចំងាយចរតាមពេល t នៅខណៈណាមួយគេហៅថាល្បឿនខណៈ

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}\right)=\frac{ds}{dt}=s'$$

ដែល $\Delta s=s_2-s_1\ \ ,\Delta t=t_2-t_1$ ។

បម្រែបម្រួលល្បឿនតាមពេល ដែលបញ្ជាក់ពីភាពលឿន មានឈ្មោះថា សម្ទុះ

$$a=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\right)=\frac{dv}{dt}=v'=s''$$

២.អនុគមន៍ឌេរីវេ៖ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ ត្រង់ចំណុច x_0 និង Δy ជាកំណើនអនុគមន៍នៅ ត្រង់ចំណុចនោះ សរសេរបានជារាង

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x$$

ដែល $A=Consts,\alpha(\Delta x)$ ជាអនុគមន៍តូចមិនកំណត់ នៃអថេរ Δx គឺ $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ចំណុច x_0 លក្ខខណ្ឌចាំបាច់នឹងគ្រប់ គ្រាន់ តម្រូវឲ្យអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ចំណុចនោះ គឺ

$y=f(x)$ ជា differentiable $\Leftrightarrow f(x)$ មានដេរីវេ $\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\right)$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ប្រសិនបើ $y=f(x)$ មានដេរីវេ នោះមានន័យថា

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A \text{ ដោយហេតុថា } \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$$

ឬក៏ $f'(x)=A$ គឺមានន័យថា មានដេរីវេ។

ឧបមាថា $f'(x)=A$ គឺ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរបានថា $\frac{\Delta y}{\Delta x}-A=\alpha(\Delta x)$ ជាអនុគមន៍តូចមិនកំណត់ ចេញពីនេះយើងបាន

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x$$

គឺមានន័យថា អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ ។

៣. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ប្រសិនបើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជា differentiableត្រង់ចំណុច x_0 មានន័យថា

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x$$

ដែល $\alpha(\Delta x)$ ជាអនុគមន៍តូចមិនកំណត់នៃអថេរ Δx ។នៅត្រង់នេះគេអាចនិយាយបានថា កំណើនអនុគមន៍ Δy មានតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលនឹងផ្នែកមេ(Principal) $A.\Delta x$ គឺគេសរសេរ $\Delta y\approx A.\Delta x$ ។

៣.១. និយមន័យ៖ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច x_0 គឺជាផ្នែកមេនៃកំណើនអនុគមន៍ និងតាងដោយ $dy=A.\Delta x$ ម៉្យាងទៀត ដោយ $A=f'(x_0)$ នោះយើងអាចសរសេរបានថា $dy=f'(x_0)\Delta x$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y=f(x)=x$ យើងមាន

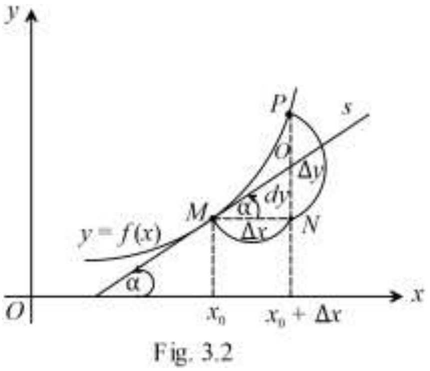


Fig. 3.2

$$dy=dx=(x_0)'\Delta x=\lim_{\Delta x\to x}\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x_0}.\Delta x$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}.\Delta x=1.\Delta x$$

នាំអោយយើងបាន $dy=f'(x_0)dx$ ឬក៏ $f'(x_0)=\frac{dy}{dx}$

នៅត្រង់នេះ dy ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ y ហើយ dx ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអថេរ x ។

ក) ប្រសិនបើអនុគមន៍ $u=u(x)$ នឹង $v=v(x)$ ជាdifferentiableនោះយើងបានរូបមន្តដេរីវេដូចតទៅ:

$$i.(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$ii.(u.v)'=u'v+v'u$$

$$iii.\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

i. $$(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$= u'(x) \pm v'(x)$$

ii. $$(u.v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x).v(x+\Delta x)]-[u(x).v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v)-u(x).v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\Delta v+v(x)\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta xx}\right]$$

$$= u(x)v'(x)+u'(x)v(x)+0.v'(x)$$

$$= u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

$$iii. \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{\Delta x.v(v+\Delta v)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v).v}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v.u'-uv'}{v^2}$$

$b) y = c = const \Rightarrow y' = 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

$c) y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$= \left[x^n + c_n^1 x^{n-1}\Delta x + c_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + c_n^{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n\right] - x^n$$

$$= \Delta x\left[c_n^1 x^{n-1} + c_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + c_n^{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right]$$

ដូច្នេះ $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[c_n^1 x^{n-1} + c_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + c_n^{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right]$$

$$= c_n^1 x^{n-1}$$

៣.២. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y = \sin x$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1.\cos x = \cos x$$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y = \cos x$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \sin x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -1.\sin x = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y = \tan x$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y = \cot x$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

៣.៣. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ឡូការីត

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y = \ln x$

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}}\right]=\frac{1}{x}.1=\frac{1}{x}$$

សម្រាប់អនុគមន៍ $y=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}\Rightarrow y'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln x)'}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$

៣.៤. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាស

ឧបមាថាអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានអនុគមន៍បញ្ច្រាស $x=\varphi(y)$ ។ប្រសិនបើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ x_0 ស្មើ $y'=f(x_0)$ នោះអនុគមន៍បញ្ច្រាស $x=\varphi(y)$ ក៏មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $y_0=f(x_0)$ ដែរ ដែលស្មើ $\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ យើងឲ្យអថេរ y នៃអនុគមន៍បញ្ច្រាស $x=\varphi(y)$ ត្រង់ចំណុច y_0 នូវកំណើន $\Delta y\neq 0$ ។ដូច្នេះ អនុគមន៍ $x=\varphi(y)$ ក៏ទទួលកំណើន Δx របស់វាដែរ ហើយ $\Delta x\neq 0$ ដោយយោងលើការកើន ឬថយចុះនៃអនុគមន៍បញ្ច្រាស។

អីចឹងយើងអាចសរសេរបានថា

$$\varphi'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

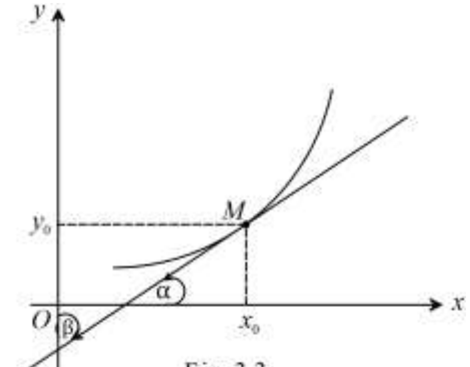


Fig. 3.3

ម្យ៉ាងវិញទៀត សមភាពខាងលើក៏អាចបកស្រាយបានតាមរយៈធណីមាត្រ(geometric interpretation) យ៉ាងសាមញ្ញបានដែរ។ឧបមាថា មានចំណុច $M(x_0,y_0)$ នៅលើក្រាភិច $y=f(x)$ ឬក៏ក្រាភិចនៃអនុគមន៍បញ្ច្រាស $x=\varphi(y)$ ។ យើងដឹងហើយថា ដេរីវេ $y'=f(x_0)$ គឺជា $\tan\alpha$ រីឯដេរីវេ $x'=\varphi(y_0)$ គឺជា $\tan\beta$ ដោយសារផលបូកមុំ α នឹង β ស្មើ $\frac{\pi}{2}$ ដូច្នេះយើងនឹងមាន

$$\varphi'(y_0)=\tan\beta=\frac{1}{\cot\beta}=\frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

ឧទាហរណ៍៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស្វ័យគុណ

$$y=a^x,(a\neq 0)\Rightarrow y'=a^x\ln a$$

$$y=a^x\Rightarrow x=\log_a y$$

$$\left(a^x\right)'_x=\frac{1}{(\log_a y)'\,y}=y\ln a=a^x\ln a$$

ជាពិសេស នៅពេលយើងមាន

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

ឧទាហរណ៍៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍បញ្ច្រាសត្រីកោណមាត្រ

$$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$$
$$y = \text{arccot}\, x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1-x^2}$$

រូបមន្តសំខាន់៖

អនុគមន៍	**ដេរីវេ**
$f(x) = b$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n (n \in z)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f(x) = -\frac{n}{x^{n-1}}$
$f(x) \pm g(x)$	$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$
$f(x).g(x)$	$\{f(x).g(x)\}' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
$\{f(x)\}^n \ (n \in z)$	$\left(\{f(x)\}^n\right)' = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' = -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$
$f(g(x))$	$\{f(g(x))\}' = f'\{g(x)g(x)\}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(u) = a^u$ u ជាអនុគមន៍នៃ x	$f'(u) = u'a^u \ln a$

$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(u)=e^u$ u ជាអនុគមន៍នៃ x	$f'(u)=u'e^u$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(u)=\ln u$ u ជាអនុគមន៍នៃ x	$f'(u)=\frac{u'}{u}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

៤. និយមន័យភាពមានដេរីវេ

អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ a ប្រសិនបើមានលីមីតនៃផលធៀបរវាងកំណើនអនុគមន៍ និងកំណើនអថេរ ត្រង់ចំណុចនោះ និងច្រាសមកវិញ ។

គេសរសេរ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

បើយើងយក $x=a+h$ នោះ $h=x-a$ ហើយពេល $x\to a$ នោះ $h\to 0$ ។

ដូច្នេះយើងបាន $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ដេរីវេនេះត្រូវបានគេហៅថា មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង f ត្រង់ a ។ ដើម្បីបង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ a គេត្រូវបង្ហាញថាដេរីវេស្តាំ និង ឆ្វេងស្មើគ្នា គឺត្រូវបង្ហាញថា ៖

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ជាទូទៅ៖ បើអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេនៅលើចន្លោះកំណត់មួយ នោះដេរីវេ $f'(x)$ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

៥. ភាពកើន និង ភាពចុះនៃអនុគមន៍

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើចន្លោះបើក $]a,b[$ នោះ

1) បើ $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ នោះ ជាអនុគមន៍កើនលើ $[a,b]$ ។

2) បើ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ នោះ ជាអនុគមន៍កើនលើ $[a,b]$ ។

3) បើ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ នោះ ជាអនុគមន៍កើនលើ $[a,b]$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

1) ដើម្បីបង្ហាញករណីនេះយើងសន្មតថា $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ និងតាង $x_2>x_1$ ដែល $x_1:x_2\notin]a,b[$ ។

2) តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមគេបាន ៖

$\exists c$ ដែល $x_1<c<x_2$ និង $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ដោយ $f'(c)<0$ និង $x_2>x_1$ យើងបាន៖

$\begin{aligned}&f(x_2)-f(x_1)>0\\&\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\end{aligned}$ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ។

3) ដើម្បីបង្ហាញករណីនេះយើងសន្មតថា $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ និងតាង $x_2>x_1$ ដែល $x_1,x_2\notin]a,b[$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមគេបាន ៖

$\exists c$ ដែល $x_1<c<x_2$ និង $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

ដោយ $f'(c)<0$ និង $x_2>x_1$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned}&f(x_2)-f(x_1)<0\\&\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ។

4) ដើម្បីបង្ហាញករណីនេះយើងសន្មតថា $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ និងតាង $x_2>x_1$ ដែល $x_1,x_2\notin]a,b[$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមគេបាន ៖ $\exists c$ ដែល $x_1<c<x_2$

និង $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

ដោយ $f'(c)=0$ និង $x_2>x_1$ រឺ $x_2<x_1$ យើងបាន៖

$\begin{aligned}&f(x_2)-f(x_1)=0\\&\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)\end{aligned}$ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ។

៥.២. តម្លៃបរមាធៀប

គេមាន f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានតម្លៃ $c\notin]a,b[$ ដែល $f'(c)=0$ ។

បើ f មានដេរីវេលើចន្លោះបើក $]a,b[$ លើកលែងតែត្រង់ c នោះ $f(c)$ អាចត្រូវបានគេកំណត់ដូចខាងក្រោមនេះ

1) បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមានត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f ។

2) បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាន ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមានៃ f ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

1) បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមានត្រង់ c នោះគេបាន៖

$f'(x) < 0$ គ្រប់ $x \in]a,c[$ នោះ $f(x)$ ចុះលើ $]a,c[$ ហើយ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in]c,b[$ នោះ $f(x)$ កើនលើ $]c,b[$

ដូចនេះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមាសម្រាយដូចករណីទី ១

៦. ដេរីវេលំដាប់ពីរ

៦.១. ចំនុចរបត់ និង ភាពផត ប៉ោងនៃអនុគមន៍

តាង f ជាអនុគមន៍ដែល $f'(c)=0$ និង មានដេរីវេទី២ លើចន្លោះបើក l ដែលមាន c នោះ

1) បើ $f''(c) > 0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមា

2) បើ $f''(c) < 0$ នោះ $f''(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមា

3) បើ $f''(c) < 0$ និង សញ្ញានៅសងខាង $f''(c)$ ប្រែប្រួល នោះគេថាអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ត្រង់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

1) បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c) > 0$ នោះគេបាន៖

$$f''(c) = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} > 0$$
$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \frac{f'(x)}{x-c} > 0, \forall x \neq c \in l$$

បើ $x<c$ នោះ $x-c<0$ គេបាន ៖ $f'(x)<0$ បើ $x>c$ នោះ $x-c>0$ គេបាន៖ $f'(x)<0$

ដូចនេះ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីអវិជ្ជមានត្រង c បញ្ជាក់ថា $f(c)$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

(ស្រាយដូចគ្នាចំពោះករណីទី២)

$$f''(c) = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} > 0$$

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}=\frac{f'(x)}{x-c}>0,\ \forall x\neq c\in I$$

បើ $x<c$ នោះ $x-c<0$ គេបាន៖ $f'(x)<0$ បើ $x>c$ នោះ $x-c>0$ គេបាន៖ $f'(x)>0$ ដូច្នេះ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជាមានត្រង់ c បញ្ជាក់ថា $f(c)$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

(ស្រាយដូចគ្នាចំពោះករណីទី 2)

៧.ទ្រឹស្តីបទ

ទ្រឹស្តីបទ រ៉ូល Rolle៖ បើ $f(x)$ ជាប់នៅលើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះបើក $]a,b[$ ដែល $f(a)=f(b)$ នោះមានតម្លៃ $x=c$ ក្នុង $]a,b[$ (មានន័យថា $a<b<c$ ដែលដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍ $f'(c)=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ឧបមាថា $f(a)=f(b)$=0 ។

១). ប្រសិនបើ $f(x)=0$ ចំពោះតម្លៃ x នៅក្នុង $[a,b]$ នាំឱ្យ $f'(c)=0$ នៅត្រង់ $x\in]a,b[$ ។

២) ប្រសិនបើមាន $x\in]a,b[$ ដែល $f(x)\neq 0$ នាំឱ្យ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាផង អប្បបរមាផងនៅក្នុង $]a,b[$ ហើយតម្លៃអតិបរមាឬតម្លៃអប្បបរមានោះមិនស្មើសូន្យទេ។ ប្រសិនបើយើងសន្មតថាតម្លៃអតិបរមានោះមិនស្មើ0 ទេនោះនាំឱ្យមានចំណុច c នៅត្រង់ $]a,b[$ ដែល $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមា។ដោយហេតុថា $f(x)$ មានដេរីវេនៅ $x=c$ ។

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

ដោយហេតុថា $f(c)\geq f(x), f(c)$ ចំពោះតម្លៃ x នៅក្នុង $[a,b]$

i. ចំពោះ $x<c, \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$$

ii. ចំពោះ $c<x, \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$$
$$f'(c)=0$$

៣) ដូច្នេះប្រសិនបើតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x)$ មិនស្មើ 0 នោះ $f'(x)=0$ ចំពោះ $x=c(a<c<b)$

ដែល $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា។ប្រសិនបើ $f(a)=f(b)=k\neq 0$ បន្ទាប់មកយើងតាង $g(x)=f(x)-k$ ។

នោះនាំឱ្យ $g(x)=f(x)-k$ ។នោះនាំឱ្យ $g(a)=g(b)=0$ ហើយ $g'(a)=f'(b)=0(a<c<b)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ Lagrange ឬ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម៖ ប្រសិនបើអនុគមន៍ពិត $f(x)$ ជាប់នៅលើចន្លោះ

បិទ $[a,b](b\neq a)$ ហើយមានដេរីវេនៅលើ ចន្លោះបើក $]a,b[$ នោះមានចំណុច $x=c$ នៅក្នុងចន្លោះបើកនោះ

ដែលដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍នេះគឺ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ តាម $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ ហើយ $g(x)=f(b)-f(x)-k(b-x)$ ។នោះ $g(x)$ ជាប់នៅ

ចន្លោះបិទ $[a,b](b\neq a)$ មានដេរីវេនៅលើចន្លោះបើក $]a,b[$ ហើយ $g(a)=g(b)=0$ ។

ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មានចំណុច c នៅចន្លោះបើក $]a,b[$ ដែល $g'(c)=0$ ។

យើងបាន $g'(c)=-f'(c)+k=0$ $f'(c)=k$

ដូច្នេះ មានចំណុច $x=c$ នៅក្នុងចន្លោះបើកនោះដែល $g'(c)=-f'(c)+k=f'(c)$ ។

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម Cauchy ៖ ប្រសិនបើអនុគមន៍ពិត $f(x)$ និង $g(x)$ ជាប់នៅលើចន្លោះ

បិទ $[a,b](b\neq a)$ មានដេរីវេនៅលើចន្លោះ បើក $]a,b[$ ហើយ $g'(x)\neq 0$ នៅលើចន្លោះបើក

$]a,b[$ នោះនាំឱ្យ មានចំណុច c នៅក្នុង $]a,b[$ ដែល $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ តាមទ្រឹស្តីបទ Lagrange មានចំណុច ξ នៅក្នុងចន្លោះបើក $]a,b[$

ដែល $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(\xi)$ ។

ដោយហេតុថា $b\neq a$ និង $g'(x)\neq 0$ នៅលើចន្លោះបើក (a,b) យើងអាចសន្និដ្ឋានថា $g(b)-g(a)\neq 0$

នៅលើចន្លោះ $]a,b[$ ។

ដូច្នេះយើងអាចតាង $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k$ និង $h(x)=f(b)-f(x)-k\{g(b)-g(x)\}$ នោះនាំឱ្យ $h(x)$ ជាប់

នៅលើចន្លោះបិទ $[a,b](b\neq a)$ មានដេរីវេនៅលើចន្លោះបើក $]a,b[$ ហើយ $h(a)=h(b)=0$ ។

ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មានចំណុច c នៅក្នុងចន្លោះបើក $]a,b[$ ដែល $h'(x)=0$ ។

$$h'(x)=-f'(c)+k.g'(c)=0$$

$$f'(c)=k.g'(c)$$

$$k=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ដូច្នេះ នៅត្រង់ចំណុច c យើងបាន $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

ទ្រឹស្តីបទ L'Hospital ៖ ឧបមាថាអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេហើយ $g'(x)\neq 0$ នៅចន្លោះបើក $]a,b[$ ។ បើ $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ ហើយមាន λ ដែល $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$ នោះ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ តាមលក្ខខណ្ឌចំពោះ $\varepsilon>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $|x-a|<\delta$ និង $a<\xi<a+\delta$

នោះ $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\lambda\right|<\varepsilon$ (និយមន័យលីមីត)

ដូច្នេះ ចំពោះចំណុច u និង v ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a<u<\xi<v<a+\delta$

យើងបាន៖ $\left|\frac{f(v)-f(u)}{g(v)-g(u)}-\lambda\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\lambda\right|<\varepsilon$ (ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម Cauchy) ។

ប្រសិនបើចំណុច u ខិតទៅដល់ a (មានន័យថា $x\to a^+$) នោះ $f(u)=g(u)=0$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះ ξ និង $v(a<\xi,v<a+\delta)$ យើងបាន៖

$$\left|\frac{f(v)}{g(v)}-\lambda\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\lambda\right|<\varepsilon$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

៨.ដេរីវេអនុគមន៍ Lmplicit

និយមន័យ៖ អនុគមន៍ implicit គឺជាអនុគមន៍ដែលបញ្ជាក់ពីទំនាក់ទំនងមួយ ដែលអថេរទាំងឡាយត្រូវតែបំពេញ។ លក្ខខណ្ឌរួមគ្នា ។ទម្រង់ទូទៅនៃអនុគមន៍នេះគឺ $F(x,y)=0......$ ។ល។

ជាឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ខាងក្រោមនេះ គឺជាអនុគមន៍ *implicit*

$$x^2+y^2=r^2,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2+xy+x^2=0,...$$

អនុគមន៍ដែលធ្វើឱ្យអថេរអាស្រ័យ (dependent variable)ស្មើនឹងអនុគមន៍មួយដែលមានអថេរមិនអាស្រ័យ (independent variable) ត្រូវបានគេហៅថា ' **អនុគមន៍ implicit** " ហើយគេតាងដោយ $y=f(x)$ ។

លំហាត់ទី១៖ តាមនិយមន័យចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\{f(x).g(x)\}'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$ ។

ចម្លើយ៖ តាមនិយមន័យយើងបាន៖

$$\{f(x).g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x+h).g(x)+f(x+h).g(x)-f(x).g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).\{g(x+h)-g(x)\}}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)}{h}$$
$$= f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

ដូច្នេះ $\{f(x).g(x)\}' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

តាមនិយមន័យ ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x).g(x)+f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ ។

ចម្លើយ៖ តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x).f(x+h)-f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x).f(x+h)-f(x).g(x)+f(x).g(x)-f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h.g(x).g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}-\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}}{g(x).g(x+h)}$$
$$= \frac{g(x)[\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}]-f(x)[\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x+h)-g(x)\}}{h}]}{\lim_{h\to 0}[g(x).g(x+h)]}$$

ដូចនេះ $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x).g(x)+f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ ។

លំហាត់ទី២៖ តាមនិយមន័យចូរស្រាយបញ្ជាក់រូនមន្ត $\{f(g(x))\}' = f'(g(x)).g'(x)$ ។

ចម្លើយ៖ តាមនិយមន័យយើងបាន

$$\{f(g(x))\}' = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$
$$= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\times\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$$
$$= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(g(x)).g'(x)$$

លំហាត់ទី៣៖ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^n$ នោះ $f'(x)=nx^{n-1}$ ។ ចូរស្រាយរូបមន្តនេះដោយប្រើ

1) អនុមានរួមគណិតវិទ្យា។

2) ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា។

ចម្លើយ៖ ១) អនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ចំពោះ $n=1,\ f(x)=x$ នោះ $f'(x)=1.x^{1-1}=1$ ពិត

ឧបមាថាអនុគមន៍ពិតរហូតដល់ $n=k$ នោះ អនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)=x^k$ នោះ $f'(x)=k.x^{k-1}$

តាមនិយមន័យយើងបាន៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^k-x^k}{h}=k.x^{k-1}$

គណនា $f(x)=x^{k+1}$ នោះ $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+h)^{k+1}-x^{k+1}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x+h)^k-x^k.x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\{(x+h)^k-x^k\}+x^k\{(x+h)-x\}}{h}$$

$$=x.k.x^{k-1}+x^k$$

$$=(k+1)x^k$$

តាម ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(x^n+nx^{n-1}.h+C(n,2)x^{n-2}.h^2+C(n,3)x^{n-3}.h^3+\ldots+h^n-x^n)$$

$$=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+C(n,2)x^{n-2}.h+C(n,3)x^{n-3}.h^2+\ldots+h^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

ដូច្នេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា អនុគមន៍ពិតរហូតដល់ *n=k*។

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា អនុគមន៍ $f(x)=x^n$ នោះ $f'(x)=nx^{n-1}$ ពិត។

លំហាត់ទី៤៖ ចូរស្រាយថា បើ $f(x)=x^t(t\in\Re)$ នោះ $f'(x)=tx^{t-1}$ ។

ចម្លើយ៖ តាង $y=x^t$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ នោះយើងបាន

$$\ln|y|=\ln|x^t|=t\ln|x|$$

ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x យើងបាន

$$\{\ln|y|\}'=\{t\ln|x|\}'$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{t}{x}$$

$$y'=\frac{t}{x}y=\frac{t}{x}x^t=tx^{t-1}$$

ដូចនេះ $f'(x) = tx^{t-1}$ ។

លំហាត់ទី៥៖ ដោយប្រើលក្ខណៈដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីត ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

1) $y = a^x (a \succ 0, a \neq 1)$

2) $y = x^x (x \succ 0)$

3) $y = x^{\ln x} (x \succ 0)$

ចម្លើយ៖ 1) $y = a^x (a \succ 0, a \neq 1)$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ នោះយើងបាន៖

$$\ln y = \ln a^x$$

$$= x \ln a$$

ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀបនិង x យើងបាន

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$

ដូចនេះ $y' = a^x \ln a$ ។

2) $y = x^x (x \succ 0)$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ នោះយើងបាន

$$\ln y = \ln x^x$$

$$= x \ln x$$

ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀបនិង x យើងបាន

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$= x^x (\ln x + 1)$$

ដូចនេះ $y' = x^x (\ln x + 1)$ ។

3) $y = x^{\ln x} (x \succ 0)$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ នោះយើងបាន

$$\ln y = \ln x^{\ln x}$$

$$= \ln x . \ln x$$

ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀបនិង x យើងបាន

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \ln x$$

$$y' = \frac{2}{x} y \ln x$$

$$= \frac{2}{x} x^{\ln x} \ln x$$

ដូចនេះ $y' = \frac{2}{x} x^{\ln x} \ln x$ ។

លំហាត់ទី៦៖ ដោយប្រើលក្ខណៈដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីត ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

1) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^4}$ 2) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$ 3) $y = \left[\frac{1}{b^{2x}}\right]^{2bx}$

ចម្លើយ៖ 1) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^4}$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ នោះយើងបាន

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^4}$$

$$= \ln(x+1)^3 - \ln(x-2)^2(x+3)^4$$

$$= \ln(x+1)^3 - \ln(x-2)^2 - \ln(x+3)^4$$

$$= 3\ln(x+1) - 2\ln(x-2) - 4\ln(x+3)$$

ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x យើងបាន ៖

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} - \frac{4}{x+3}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3(x-2)(x+3) - 2(x+1)(x+3) - 4(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$= -\frac{3x^2 + x + 16}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

យើងបាន៖

$$y' = -y\frac{3x^2 + x + 16}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$y' = -\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^4} \times \frac{3x^2 + x + 16}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{(x+1)^2(3x^2 + x + 16)}{(x-2)^3(x+3)^5}$

2) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ ។ នោះគេបាន

$\ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2}\{\ln(x-1) + \ln(x+3) - 3\ln(x+1)\}$ ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀប

នឹង x យើងបាន ៖ $\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x+1}\right\}$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left\{\frac{(x+3)(x+1)+(x-1)(x+1)-3(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+1)}\right\}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left\{\frac{-x^2-2x+11}{(x^2-1)(x+3)}\right\}$$

យើងបាន៖

$$y'=\frac{1}{2}y\left\{\frac{-x^2-2x+11}{(x^2-1)(x+3)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{-x^2-2x+11}{(x^2-1)(x+3)}\right\}\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$$

3. $y=\left[\frac{1}{b^{2x}}\right]^{2bx}$ បំពាក់លោការីតនៃអង្គទាំងពីរ ។ នោះគេបាន

$\ln y=2bx\ln\frac{1}{b^{2x}}=-4bx^2\ln b$ ធ្វើដេរីវេនៃអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x យើងបាន ៖

$\frac{y'}{y}=-8bx\ln b$ នាំឲ្យ $y'=-8bxy\ln b$

ដូចនេះ $y'=-8bx\left[\frac{1}{b^{2x}}\right]^{2bx}\ln b$ ។

លំហាត់ទី៧៖ គណនាដេរីវេទីn នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

1. $y=\pi x^3-7x$ 2. $y=\sqrt{x+5}$ 3. $y=\frac{1}{x+3}$

4. $y=\frac{x+1}{x-1}$ 5. $y=\sqrt{2x-1}$ ។

ចម្លើយ៖ គណនាដេរីវេទីn នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

1. $y=\pi x^3-7x$ គេបាន

$$y'=3\pi x^2-7\ ,\ y''=6\pi x\ ,\ y'''=6\pi\ ,\ y^{(4)}=0$$

ដូចនេះ $y^{(n)}=0$ ចំពោះ $n\geq 4$

2. $y=\sqrt{x+5}$ គេបាន

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}=\frac{1}{2}(x+5)^{\frac{1}{2}}\ ,\ y''=-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\ ,\ y'''=\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\ ,\ y^{(4)}=-\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$$

ដូចនេះ $y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}(x+5)^{-\frac{2n-1}{2}}$ ។

3. $y=\frac{1}{x+3}=(x+3)^{-1}$ គេបាន

$$y'=-\left(x+3\right)^{-2}=-\frac{1}{\left(x+3\right)^{2}}$$

$$y''=2\left(x+3\right)^{-3}=\frac{2}{\left(x+3\right)^{3}}$$

$$y'''=-2\cdot3\left(x+3\right)^{-4}=-\frac{2\cdot3}{\left(x+3\right)^{4}}$$

$$y^{(4)}=2\cdot3\cdot4\left(x+3\right)^{-5}=-\frac{2\cdot3\cdot4}{\left(x+3\right)^{5}}$$

ដូចនេះ $y^{(n)}=\left(-1\right)^{n}\frac{n!}{\left(x+3\right)^{n+1}}$ ។

4. $y=\frac{x+1}{x-1}$ បម្លែងសមីការនេះយើងបាន

$$y=\frac{\left(x-1\right)+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}=1+2\left(x-1\right)^{-1}$$

$$y'=-2\left(x-1\right)^{-2}$$

$$y''=2\cdot2\left(x-1\right)^{-3}$$

$$y'''=-2\cdot2\cdot3\left(x-1\right)^{-4}$$

$$y^{(4)}=2\cdot2\cdot3\cdot4\left(x+3\right)^{-5}$$

ដូចនេះ $y^{(n)}=\left(-1\right)^{n}2\left(n!\right)\left(x-1\right)^{-(n+1)}$ ។

5. $y=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow y^{2}=2x-1$

ធ្វើដេរីវេអនុគមន៍ Implicit យើងបាន

$$2y'y=2$$

$$y'=\frac{1}{y}=y^{-1}$$

$$y''=-y^{-2}y'=-y^{-2}.y^{-1}=-y^{-3}$$

$$y'''=3y^{-4}.y'=3y^{-4}.y^{-1}=3y^{-5}$$

$$y^{(4)}=-3.5.y^{-6}.y'=-3.5.y^{-6}.y^{-1}=-3.5y^{-7}$$

យើងបាន:

$$y^{(n)}=(-1)^{n+1}[1.3.5....(2n-3)]y^{-(2n-1)}=(-1)^{n+1}[1.3.5....(2n-3)]\frac{1}{y^{2n-1}}$$

ដូច្នេះ $y^{(n)}=(-1)^{n+1}[1.3.5....(2n-3)]\frac{1}{(\sqrt{2x+1})^{2n-1}}$

លំហាត់ទី៨៖ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

1) $y=\arcsin x\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ ដែល $-1\le x\le 1$ ។ 2) $y=\arcsin u\Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

ចម្លើយ៖ 1). $y=\arcsin x\Rightarrow x=\sin y$ ធ្វើដេរីវេអង្គសងខាង យើងបាន:

$$x' = y'\cos y$$

$$1 = y'\sqrt{1-\sin^2 y}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2). $y = \arcsin u \Rightarrow u = \sin y$ ធ្វើដេរីវេអង្គសងខាង យើងបានៈ

$$u' = y'\cos y = y' = \sqrt{1-\sin^2 y}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$y = \arccos u \Rightarrow u = \cos y$

$$u' = -y'\sin y = -y'\sqrt{1-\cos^2 y}$$

$$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$y = \arctan u \Rightarrow u = \tan y$

$$u' = \frac{y'}{\cos^2 y}, y' = u'\cos^2 y\ ,\ y' = \frac{u'}{u^2+1}$$

លំហាត់

១. គណនាដេរីវេទីនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

$a.\ y=\dfrac{2}{2x+1}$ $\quad b.\ y=\dfrac{x+4}{x+3}$ $\quad c.\ y=\sqrt{x-3}$

២. ដោយប្រើលក្ខណៈដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីត ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

$a.\ y=\sqrt{\dfrac{(3+x)(x+1)^3}{(x+5)^2}}$ $\quad b.\ y=x^{\ln x},\ x>0$

៣. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{1+x}$

a. បើ $x_1>0$, $x_2>0$ ហើយ $x_1\neq x_2$ នោះបង្ហាញថា $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}|x_2-x_1|$ ។

b. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=x$ មានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់។

៤. គេឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[1,2]$ ដែល $f(x)=x^3+2x+1$ ។

ដោយអនុវត្តវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $f(1.01)$ ។

៥. គេឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ ℝ ដែល $f(x)=\sin x$ ។

ក. កំណត់តម្លៃអមនៃអនុគមន៍ដេរីវេ $f'(x)$ ចំពោះ $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ. បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ គេបាន $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\le\sin x\le x$ ។

៦. គេឲ្យ $f(x)$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$ ។ បើមានចំនួនពិត M ដែល $|f(x)|\le M$ ចំពោះ $x\in[a,b]$ បង្ហាញថា $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$ ។

៧. គេឲ្យ $f(x)$ មានដេរីវេលើ ℝ ដែល $f(t)=\cos t$ ។បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x,y\in$ ℝ គេបាន $|\cos x-\cos y|\le|x-y|$ ។

៨. បង្ហាញថាវិសមភាពខាងក្រោមនេះពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង h ។

1. $|\sin(x+h)-\sin x|\le|h|$ $\quad$ 2. $|\cos(x+h)-\cos x+h\sin x|\le h^2$

៩. ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេបង្ហាញថា

1. $f(x)=x^n$ នោះ $f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad$ 2. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$

ឯកសារយោង

1. សម្ដេច ជួន ណាត វចនានុក្រមខ្មែរ ភាគ១ ភាគ២ បោះពុម្ពលើកទី៥ ការផ្សាយរបស់ពុទ្ធសាសនាបណ្ឌិត្យ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ ១៩៦៧។
2. សៀវភៅវិធីសាស្ត្របង្រៀនគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ឆ្នាំ ២០១៩
3. សៀវភៅសិក្សាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់។
4. សៀវភៅសិក្សាគណិតវិទ្យា ១២ភាគ បោះពុម្ពដោយគម្រោង STEPSAM I, ឆ្នាំ ២០០៣