ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ការអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀន តាមវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ និងតាម ផែនទីគំនិត

(Scientific method & Concept map)

លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា

ប្រើប្រាស់ថវិកាគម្រោងអភិវឌ្ឍន៍វិស័យអប់រំ
មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (USESDP)

ឆ្នាំ២០២០

មុខកថា

ទស្សនវិស័យអប់រំនាសតវត្សរ៍ទី២១ បាននាំមកនូវវឌ្ឍនភាពទាំងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថល ដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងការអភិវឌ្ឍសង្គម និងសេដ្ឋកិច្ច។ ឆ្លើយតបទៅនឹងទស្សនៈខាងលើនេះ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានយកចិត្តទុកដាក់លើការបណ្ដុះបណ្ដាល និងការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្សប្រកបដោយចីរភាព ដោយដាក់ចេញនូវគោលដៅជាអាទិភាព សម្រាប់ការធ្វើកំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ ឈរលើសសរស្ដម្ភចំនួន៥ រួមមាន៖ (១)ការអនុវត្តគោលនយោបាយគ្រូបង្រៀន (២)ការវាយតម្លៃ (៣)ការងារអធិការកិច្ច (៤)កម្មវិធីសិក្សា និងបរិស្ថានសិក្សា និង(៥)ឧត្ដមសិក្សា។ ការធ្វើកំណែទម្រង់គ្រូបង្រៀន និងកម្មវិធីសិក្សា គឺដើម្បីធានាឱ្យកម្ពុជាមានការអប់រំប្រកបដោយគុណភាព មានធនធានមនុស្សប្រកបដោយសមត្ថភាពវិជ្ជាជីវៈ និងដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងតម្រូវការទីផ្សារពលកម្ម។

ទ្រឹស្ដីនៃការរៀននិងបង្រៀន វិធីសាស្ត្របង្រៀន វិធីបង្រៀន និងយុទ្ធវិធីបង្រៀនល្អៗ សម្រាប់លើកកម្ពស់ឧត្ដមភាពគ្រូបង្រៀន និងគុណភាពនៃការសិក្សា ត្រូវបានរៀបចំឡើងទៅតាមទស្សនៈ និងចក្ខុវិស័យថ្មីៗ ដោយបានធ្វើការសំយោគចំណេះដឹងពីទ្រឹស្ដីអប់រំបែបស្ថាបនានិយម កម្រិតគិតរបស់ប្លូមតាក់សូណូមី និងវិធីសាស្ត្របង្រៀនបច្ចុប្បន្នរបស់ប្រទេសមួយចំនួនក្នុងតំបន់ និងសាកលលោក ដើម្បីឱ្យសិស្សានុសិស្សទទួលបានវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទាចរិយាសម្បទា និងកាយសម្បទា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា សង្ឃឹមថាគ្រប់ស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ នឹងចូលរួមគាំទ្រអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀនទាំងអស់នេះ ដើម្បីពង្រឹងសក្ដានុពលរបស់គ្រូបង្រៀនគ្រប់កម្រិតសិក្សា និងអភិវឌ្ឍជំនាញវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀនឱ្យកាន់តែបានល្អប្រសើរឡើង។

ក្រសួង សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងកោតសរសើរចំពោះគណៈកម្មការអភិវឌ្ឍវិធីសាស្ត្របង្រៀន គ្រូឧទ្ទេស និងលោកគ្រូ-អ្នកគ្រូ ដែលបានខិតខំប្រឹងប្រែងយកអស់កម្លាំងកាយចិត្ត និងប្រាជ្ញា ធ្វើឱ្យស្នាដៃដ៏មានសារៈសំខាន់នេះសម្រេចបាន ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់សង្គមជាតិយើង។

ថ្ងៃ [illegible] ខែ [illegible] ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស. ២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី [illegible] ខែ [illegible] ឆ្នាំ២០២០

រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន**

អារម្ភកថា

សាកលភាវូបនីយកម្មលើវិស័យសេដ្ឋកិច្ចបច្ចេកវិទ្យានយោបាយនិងវិទ្យាសាស្ត្របានធ្វើឱ្យពិភពលោកកាន់តែមានការប្រកួតប្រជែងគ្នា ហើយពេលខ្លះក៏សហការគ្នាដើម្បីឈានទៅសម្រេចគោលដៅអភិវឌ្ឍសហស្សវត្សរ៍និងអភិវឌ្ឍប្រកបដោយចីរភាព។ស្របតាមកំណែទម្រង់ស៊ីជម្រៅក្នុងវិស័យអប់រំជាមួយការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្សប្រកបដោយវិជ្ជាសម្បទាបំណិនសម្បទាចរិយាសម្បទានិងកាយសម្បទាជាកត្តាកំណត់ភាពជោគជ័យនៃការអភិវឌ្ឍលើចំណេះដឹងរបស់សិស្សឱ្យមានការរីកចម្រើនជាលំដាប់។ដោយយោងលើបញ្ហានេះទើបក្រុមគ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាដែលជាគ្រូបង្គោលថ្នាក់ជាតិបានសម្រេចលើកយកខ្លឹមសារ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងរៀនគណិតវិទ្យាតាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ និងផែនទីគំនិត ទៅក្នុងកម្មវិធីវិក្រឹតកាគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ជាតិដើម្បីធ្វើឱ្យសិក្ខាកាមអាចបញ្ជ្រាបខ្លឹមសារវិធីសាស្ត្រទាំងនេះ ដល់គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅតាមសាលាវិទ្យាល័យនានានៅទូទាំងរាជធានីខេត្តនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ការប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ និងផែនទីគំនិត ក្នុងការរៀន និងបង្រៀនគណិតវិទ្យាជាចំណែកមួយក្នុងការពង្រឹង និងពង្រីកចំណេះដឹងរបស់សិស្ស និងធ្វើឱ្យគុណភាពនៃការរៀន និងបង្រៀនកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពខ្ពស់បន្ថែមមួយកម្រិតទៀត។ ការប្រើប្រាស់វិធីនៃការរៀន និងបង្រៀនតាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រមានចំណុចសំខាន់ៗដូចជា៖ ១. ការកំណត់បញ្ហា ២. ការបង្កើតសម្មតិកម្ម ៣. ការធ្វើពិសោធន៍ ឬ ការធ្វើតេស្តសម្មតិកម្ម ៤.ការវាស់វែង និងវិភាគលទ្ធផល និង ៥. ការទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាន ។ ការប្រើប្រាស់វីធីនៃការរៀន និងបង្រៀនបែបផែនទីគំនិតគឺ ជាការបណ្តុះគំនិតឱ្យសិស្សចេះបង្កើតផែនទី ឬប្លង់សម្រាប់សិក្សាទៅលើខ្លឹមសារមេរៀន ចេះពិភាក្សា និងចេះលើកសំណួរថ្មីៗ ក៏ដូចជាឱ្យសិស្សចេះសង្កេត និងលើកហេតុផលជំទាស់។ ចំណុចសំខាន់ៗ ទាំងនេះជាចលករសម្រាប់សិស្សក្នុងការរៀនគណិតវិទ្យាដើម្បីទទួលបានចំណេះដឹងមួយពេញលេញនិងមានគុណភាព។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសិក្ខាកាមទាំងអស់ដែលជាគ្រូគណិតវិទ្យានិងកំពុងបង្រៀននៅកម្រិតអនុវិទ្យាល័យឡើងទៅនិងព្យាយាមស្តាប់ការពន្យល់របស់គ្រូឧទ្ទេសដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងសិក្សាស្វែងយល់អត្ថន័យដោយខ្លួនឯងពីការបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយចំណោទបញ្ហានិងតុក្កតាគំនិតនេះដើម្បីក្រេបជញ្ជក់យកខ្លឹមសារនិងគំរូនៃការបង្រៀនថ្មីៗទុកជាទុនក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅតាមវិទ្យាល័យបន្តនិងបណ្តុះបណ្តាលដល់សិស្សរបស់ខ្លួនឱ្យក្លាយជាសិស្សដែលចូលចិត្តរៀនមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា និងរៀនពូកែលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាថែមទៀតផង។

យើងខ្ញុំដែលជាគ្រូឧទ្ទេសគណិតវិទ្យាទាំងអស់នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំមានការរីករាយ នឹងទទួលយកនូវការរិះគន់ទាំងឡាយ ដើម្បីកែលម្អពីសំណាក់លោកគ្រូអ្នកគ្រូ ជាពិសេសសិក្ខាកាម ចំពោះចំណុចខ្វះខាតនិងកំហុសឆ្គងក្នុងការរៀបចំឯកសារនេះឡើងដោយអចេតនារបស់ក្រុមយើងខ្ញុំ។

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ	**ហង់ជួន ណារ៉ុន**	រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
២. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ	**ណាត ម៊ុនរឿន**	រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
៣. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត	**សៀង សុវណ្ណា**	នាយកនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
៤. លោក	**ឌី ប៊ុណ្ណា**	នាយករងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
៥. បណ្ឌិត	**នួច វិរ៉ា**	នាយករងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
៦. លោកស្រី	**ម៉ុន សុផានី**	នាយិការងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
៧. លោក	**ថៃ ហេង**	នាយករងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រងសៀវភៅ

១. គ្រូឧទ្ទេស	**គណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ**	វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
២. គ្រូបង្រៀន	**គណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ**	សាលាជំនាន់ថ្មី

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

១. លោក	**ម៉ៅ សារឿន**	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
២. លោក	**ចេង ថុន**	អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
៣.លោក	**គីម លាង**	អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

មាតិកា

បុព្វកថា i
អារម្ភកថា ii
មេរៀនទី១ ៖ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ 1
១.១ និយមន័យ 1
១.២.ជំហានទាំង៥របស់វិធីវិទ្យាសាស្ត្រ 1
១.២.១.ការកំណត់បញ្ហា 1
១.២.២.ការបង្កើតសម្មតិកម្ម 1
១.២.៣.ការធ្វើពិសោធន៍ ឬការធ្វើតេស្តសម្មតិកម្ម 1
១.២.៤.ការវាស់វែង និងវិភាគលទ្ធផល 2
១.២.៥.ការទាញសេចក្ដីសន្និដ្ឋាន 2
កិច្ចតែងការបង្រៀនទី១ 3
កិច្ចតែងការបង្រៀនទី២ 7
កិច្ចតែងការបង្រៀនទី៣ 10
មេរៀនទី២ ៖ ស្វ៊ីត និងស៊េរី 15
២.១ ផលសងនៃស្វ៊ីត 15
២.២ ផលបូកនៃស្វ៊ីត 17
២.៣ ទំនាក់ទំនងកំណើន 27
២.៤ ទំនាក់ទំនងរវាងanនិង Sn 34
២.៥. ទំនាក់ទំនងកំណើនក្នុងទម្រង់ $an+2+pan+1+qan=0$ 41
២.៦ ទំនាក់ទំនងកំណើនបញ្ជាក់ដោយទម្រង់ប្រភាគ 44
២.៧.អនុមានរួមគណិតវិទ្យា 50
២.៨.ទំនាក់ទំនងកំណើន និងអនុមានរួមគណិតវិទ្យា 54
២.៩ សម្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព 59
មេរៀនទី៣ ៖ ផែនទីគំនិត 67
៣.១. តើផែនទីគំនិតជាអ្វី? 67
៣.២. ការបង្កើតផែនទីគំនិត 67
៣.៣. ការប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិត នៅក្នុងថ្នាក់រៀន 69
កិច្ចតែងការបង្រៀនទី១ 71
កិច្ចតែងការបង្រៀនទី២ 74
មេរៀនទី៤ ៖ អនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល 80
ឯកសារយោង 92

មេរៀនទី១ ៖ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ

១.១ និយមន័យ

វិធីវិទ្យាសាស្ត្រគឺជាវិធីដែលអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រប្រើដើម្បីធ្វើការស្រាវជ្រាវ។ អ្នកស្រាវជ្រាវផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រដែលទទួលបានជោគជ័យកន្លងមកតែងតែប្រើវិធីស្រាវជ្រាវផ្សេងៗគ្នា។ ប៉ុន្តែវិធីទាំងនោះមានលំនាំប្រហាក់ប្រហែលគ្នា ដូច្នេះទើបធ្វើឱ្យអ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយអានសំយោគ ជាវិធីស្រាវជ្រាវមួយមានលក្ខណៈរួមដែលគេឱ្យឈ្មោះថា វិធីវិទ្យាសាស្ត្រ។ វិធីវិទ្យាសាស្ត្រមានប្រាំជំហាន៖

១.២.ជំហានទាំង៥របស់វិធីវិទ្យាសាស្ត្រ

១.២.១.ការកំណត់បញ្ហា

ការកំណត់បញ្ហា ផ្តើមចេញពីការសង្កេតបាតុភូតអ្វីមួយ ឬការជួបប្រទះបាតុភូតនោះដោយចៃដន្យ។ តាមរយៈការសង្កេតបាតុភូតឬការជួបបាតុភូតដោយចៃដន្យនេះអ្នកសង្កេតនឹងមានចម្ងល់ ហើយបានលើកជាសំណួរដើម្បីរៀបចំសកម្មភាពស្រាវជ្រាវ។

១.២.២.ការបង្កើតសម្មតិកម្ម

អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រកាលណាជួបនឹងចម្ងល់ ឬសំណួរហើយ តែងតែខិតខំត្រិះរិះពិចារណាដើម្បីរកចម្លើយដោយការស្មានទុកដែលមានហេតុផលផ្អែកលើបទពិសោធន៍ និងចំណេះដឹងដែលមានស្រាប់។ ចម្លើយស្មាននេះគឺជា សម្មតិកម្ម។ ការព្យាយាមពន្យល់នូវចម្ងល់ ឬសំណួរដោយការស្មានទុកប្រកបដោយហេតុផលនេះហៅថា ការបង្កើតសម្មតិកម្ម។ សម្មតិកម្មត្រូវតែច្បាស់លាស់ ហើយអាចធ្វើតេស្តបាន។

នៅជំហាននេះក្នុងថ្នាក់រៀនគ្រូត្រូវតែសម្របសម្រួលឱ្យសិស្សបង្ហាញគំនិត(ចម្លើយ) ដំបូងរបស់ពួកគេ(ជាក្រុមឬបុគ្គល)។ ប្រសិនបើគំនិតរបស់ពួកគេស្របគ្នាទាំងអស់គ្រូត្រូវលើកគំនិតប្រឆាំងដើម្បីជំរុញការគិតរបស់សិស្ស។ប្រសិនបើគំនិតរបស់ពួកគេស្របគ្នាទាំងអស់ គ្រូត្រូវលើកគំនិតប្រឆាំងដើម្បីជំរុញការគិតរបស់សិស្ស។ ប្រសិនបើ គំនិតរបស់ពួកគេមានភាពខុសគ្នារវាងក្រុមនីមួយៗ ឬ បុគ្គលម្នាក់ៗ ផ្សេងគ្នាជាច្រើនគ្រូត្រូវឱ្យតំណាងក្រុមឬបុគ្គលឡើងបង្ហាញហេតុផលរបស់ពួកគេ។ ក្រោយពីបង្ហាញហេតុផលរួចរាល់ហើយគ្រូត្រូវផ្តល់ឱកាសដល់សិស្សទាំងអស់ជ្រើសរើសចម្លើយជាថ្មីម្តងទៀត។ ពេលនេះសិស្សខ្លះនឹងប្តូរគំនិតជ្រើសរើសចម្លើយថ្មីមានហេតុផល ឬអំណះអំណាងល្អជាង។ ចម្លើយដែលសិស្សភាគច្រើនគិតថាជាចម្លើយត្រឹមត្រូវចម្លើយនេះ គឺជាសម្មតិកម្មរបស់សំណួរគន្លឹះខាងលើហើយ។ តាមរយៈសម្មតិកម្មនេះ គ្រូត្រូវសម្របសម្រួលឱ្យសិស្សបង្កើតប្លង់ពិសោធន៍ ដើម្បីធ្វើតេស្តសម្មតិកម្ម។ សិស្សក្រុមផ្សេងៗ គ្នាអាចបង្កើតប្លង់ពិសោធន៍ដើម្បីធ្វើតេស្តសម្មតិកម្មខុសៗគ្នា។ ដូច្នេះ គ្រូត្រូវចេះសំយោគប្លង់ពិសោធន៍ របស់សិស្សទាំងអស់ទៅជាប្លង់ពិសោធន៍រួមមួយដូចដែលគ្រូបានរៀបចំទុកជាស្រេច។

១.២.៣.ការធ្វើពិសោធន៍ ឬការធ្វើតេស្តសម្មតិកម្ម

ដើម្បីធ្វើតេស្តសម្មតិកម្មនោះ អ្នកស្រាវជ្រាវតែងតែធ្វើពិសោធន៍ជាក់ស្តែងដោយប្រើប្រាស់សម្ភារៈនិង

ដំណើរការពិសោធន៍ទៅតាមខ្លឹមសារនៃសម្មតិកម្ម។ នៅក្នុងថ្នាក់រៀនវិញត្រង់ចំណុចនេះគ្រូត្រូវពន្យល់ឡើងវិញឱ្យបានច្បាស់នូវរបៀបប្រើប្រាស់សម្ភារៈ ការដំឡើងឧបករណ៍និងដំណើរការពិសោធន៍រួមទាំងរបៀបកត់ត្រាទិន្នន័យដើម្បីគណនាលទ្ធផលពិសោធន៍ជាមុនទើបឱ្យសិស្សធ្វើពិសោធន៍ដោយខ្លួនឯងគ្រូគ្រាន់តែតាមដានសកម្មភាពសិស្សនិងសម្រសម្រួលប៉ុណ្ណោះ។

១.២.៤.ការវាស់វែង និងវិភាគលទ្ធផល

ក្រោយពីការធ្វើតេស្តសម្មតិកម្ម ឬ ការធ្វើពិសោធន៍ អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រប្រមូលបានទិន្នន័យដែលជាលទ្ធផលនៃការវាស់វែង ឬ គណនាលទ្ធផលពិសោធន៍ជាក់លាក់មួយ។ ក្នុងនោះទិន្នន័យចែកចេញជាពីរផ្នែក គឺបរិមាណនិងគុណភាពដែលទិន្នន័យផ្នែកបរិមាណ ជាទិន្នន័យងាយក្នុងការវាស់វែង (ទំហំ ម៉ាស ប្រវែង.) និងទិន្នន័យបែបគុណភាព ជាទិន្នន័យពិបាកវាស់វែង (ពណ៌ ក្លិន រសជាតិ...)។

នៅក្នុងថ្នាក់រៀនត្រង់ជំហាននេះគេត្រូវឱ្យសិស្សបង្ហាញលទ្ធផលពិសោធន៍របស់ខ្លួនតាមក្រុមនីមួយៗ។ ប្រសិនបើក្រុមណាមួយទទួលបានលទ្ធផលមិនប្រក្រតីសូមឱ្យតំណាងក្រុមនោះរៀបរាប់ពីដំណើរការពិសោធន៍ឡើងវិញហើយឱ្យសិស្សក្រុមផ្សេងទៀតជួយកែលម្អឬ ជួយរកចំណុចខ្វះខាតឱ្យឃើញ។ ក្រោយពីទទួលបានលទ្ធផល សិស្សត្រូវវិភាគទៅលើលទ្ធផលនោះ ថាតើវាគាំទ្រសម្មតិកម្មដែរឬទេ? បន្ទាប់មកគេអាចទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋានបាន។

១.២.៥.ការទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាន

ការទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាននេះមានន័យថា សម្មតិកម្មនោះគាំទ្រដោយលទ្ធផលពិសោធន៍ ឬ មិនត្រូវបានគាំទ្រដោយលទ្ធផលពិសោធន៍។ ត្រង់ចំណុចនេះ ក្នុងថ្នាក់រៀនគ្រូត្រូវដាក់សំណួរមួយថា "តាម រយៈលទ្ធផលពិសោធន៍របស់អ្នក តើអ្នករកឃើញអ្វីខ្លះ"?

តាមរយៈការរកឃើញខ្លឹមសារពីលទ្ធផលពិសោធន៍ សិស្សអាចឆ្លើយសំណួរដោយខ្លួនឯងបានហើយជាចុងក្រោយ ពួកគេនឹងអាចទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋានពីខ្លឹមសារមេរៀនបានដែលឆ្លើយតបទៅនឹងវត្ថុបំណងនៃមេរៀន។

សំណួរ

១.អ្វីទៅជាវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ? វិធីនេះមានប៉ុន្មានជំហាន?អ្វីខ្លះ?

២.តើគ្រូបង្រៀនប្រើប្រាស់វិធីវិទ្យាសាស្ត្រសម្រាប់បង្រៀនយ៉ាងដូចម្តេច?

៣.ក្នុងជីវភាពរស់នៅ ប៉េងប៉ោង អាចប៉ោង(រីកមាឌ)កាលណាគេផ្លុំបញ្ចូលខ្យល់ទៅក្នុងវា។ បើគេចងមាត់វាឱ្យជិត តើត្រូវធ្វើដូចម្តេចដើម្បីឱ្យវាប៉ោង? ចូររៀបរាប់ និងពន្យល់គំនិតរបស់អ្នក។

កិច្ចតែងការបង្រៀនទី១

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃពុធ ១២កើត ខែ អស្សុជ ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស២៥៦៤ ត្រូវនឹងថ្ងៃទី៣០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ២០២០

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៖ ១០

មេរៀនទី១៖ ចម្លាស់

ខ្លឹមសារមេរៀន៖ ១.២. ចម្លាស់

ឃ. ចម្លាស់វង់

រយៈពេល៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណងនៃមេរៀន៖** ក្រោយពីរៀនចប់មេរៀនសិស្សមាន៖

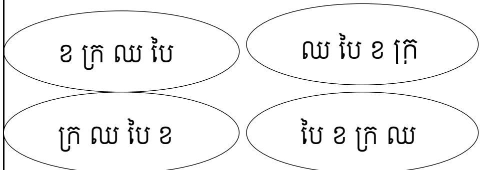
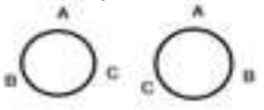
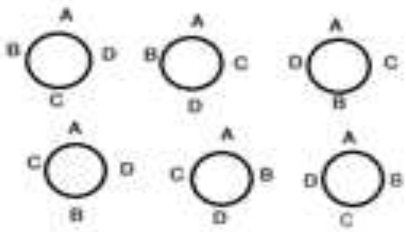
- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សបង្ហាញបានពីរូបមន្តនៃការធ្វើចម្លាស់វង់ តាមរយៈពិភាក្សាក្រុម និងការធ្វើពិសោធន៍បានយ៉ាងត្រឹមត្រូវ
- **បំណិនសម្បទា៖** គណនាលំហាត់ចម្លាស់វង់ តាមរយៈការពិភាក្សាជាដៃគូ បានយ៉ាងត្រឹមត្រូ
- **ចរិយាសម្បទា៖**សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់ និងចូលរួមយ៉ាងសកម្មក្នុងការរៀននិងចំណេះដឹងក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាដែលបានជួបប្រទះក្នុងជីវភាពជាក់ស្តែង។

II. **សម្ភារឧបទេស៖** ក្រដាស A_3 ហ្វឺត ផ្ទាំងរូបភាព សិស្ស តុមូល

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** តាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ

IV. **ដំណើរនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១៖រដ្ឋបាលថ្នាក់ (៣នាទី)		
-ពិនិត្យអនាម័យ វិន័យ -សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមានសិស្ស	ប្រមូលអារម្មណ៍សិស្ស	-តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍ -ដាក់ដៃលើតុនិងអង្គុយដោយស្ងៀមស្ងាត់
ជំហានទី២៖រំលឹកមេរៀនចាស់(៥នាទី)		
-ចាត់សិស្សបីនាក់ឡើងកែលំហាត់ -គ្រូតពិនិត្យចម្លើយរួចឱ្យសិស្សធ្វើការដៃគូដើម្បីកែតម្រូវការគណនា $4!$ $5!$	**លំហាត់** គណនា $4!$ $5!$	**-ចម្លើយសិស្ស** $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$ $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$
ជំហានទី៣៖ មេរៀនថ្មី(៣៥នាទី)		

	មេរៀនទី ១ ចម្លាស់ **១.២. ចម្លាស់** **ឃ. ចម្លាស់វង់**	
គ្រូបំផុសបញ្ហាឱ្យសិស្សគិត ឱ្យសិស្ស៤នាក់បានចូលអង្គុយជុំវិញតុមូលមួយដើម្បីពិភាក្សាក្រុម។តើគេអាចអង្គុយបានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា?	**១.កំណត់បញ្ហា** សិស្ស៤នាក់បានចូលអង្គុយជុំវិញតុមូលមួយដើម្បីពិភាក្សាក្រុម។តើគេអាចអង្គុយបានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា?	- គិត និងមានចម្លល់ខុសៗគ្នា
- គ្រូបែងចែកសិស្សជា៥ក្រុមដើម្បីពិភាក្សារកចម្លើយ - គ្រូបង្ហាញរូបមួយនៅលើក្ដារខៀនដើម្បីឱ្យសិស្សទាញសម្មតិកម្ម	**២.សម្មតិកម្ម** កាលណាយើងយកបាល់ទាំងបួនមករៀបជាជួរដេកយើងបាន  ចំពោះចម្លាស់វង់មួយរបៀបអាចយកមករៀបជាចម្លាស់ជាជួរបាន៤របៀបខុសគ្នា គេបានចំនួនចម្លាស់វង់តិចជាងចំនួនជាជួរដេក៤ដង។ គេបាន $\frac{4!}{4}=3!=3\times2\times1=6$	- ចូលតាម ក្រុមដើម្បីពិភាក្សារកចម្លើយ - សិស្សមើលរូបពិភាក្សាគ្នាទាញជាសម្មតិកម្ម
- ឱ្យសិស្សអង្គុយជារាងរង្វង់ដើម្បីធ្វើសកម្មភាពនិងកត់ត្រាករណីកើតឡើង	**៣.ពិសោធន៍** សិស្សបីនាក់អង្គុយតុមូល  សិស្សបួននាក់អង្គុយតុមូល 	- ចាប់ផ្ដើមធ្វើសកម្មភាពអង្គុយជុំវិញតុមូលកត់ត្រាចំនួនករណីដែលអាចកើតឡើងដាក់នៅក្រដាស A_3 ដោយចាប់ផ្ដើមចេញពីការអង្គុយដោយមានសិស្ស៣នាក់រួច៤នាក់ឡើងបង្ហាញលទ្ធផលនិងធ្វើសេចក្ដីសន្និដ្ឋាន

- ឱ្យសិស្សបង្ហាញលទ្ធផល និងទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋានតាមក្រុមនីមួយៗ	សិស្ស៥នាក់អង្គុយតុមូល $\frac{5!}{5}=4!=4\times3\times2\times1=24$ **៤. លទ្ធផល** សិស្សបីនាក់អង្គុយតុមួយ $\frac{4!}{4}=3!=3\times2\times1=6$ សិស្សបីនាក់អង្គុយតុមួយ $\frac{4!}{4}=3!=3\times2\times1=6$ សិស្សបីនាក់អង្គុយតុមួយ $\frac{5!}{5}=4!=4\times3\times2\times1=24$ **៥. សន្និដ្ឋាន** សិស្សបីនាក់អង្គុយតុមួយ $\frac{4!}{4}=3!=3\times2\times1=6$ សិស្ស នាក់អង្គុយតុមូល $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ **ជាទូទៅ៖**ចំនួនចម្លាស់វង់នៃ n ជាតុគឺ $\frac{n!}{n}=(n-1)!$	
ជំហានទី៤៖ពង្រឹងចំណេះដឹង (៥នាទី)		

ឱ្យសិស្សពិភាក្សាគ្នាជាដៃ ដើម្បីគណនាលំហាត់	**លំហាត់** សិស្សមួយក្រុមមានស្រី២នាក់ ប្រុស៦នាក់ អង្គុយជុំវិញតុមូលធ្វើការងារក្រុមមួយ។ ក.តើសិស្សអាចអង្គុយមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា? ខ.តើសិស្សអាចអង្គុយបានប៉ុន្មានរបៀប បើសិស្សស្រី២នាក់អង្គុយទល់មុខគ្នា។ **ចម្លើយ** ក. រកចំនួនរបៀបនៃការអង្គុយ ចំនួនរបៀប $\frac{8!}{8}=7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$ ខ.រកចំនួនរបៀប ក្នុងករណីសិស្សស្រី២នាក់ អង្គុយទល់មុខគ្នា ដោយសិស្សមាន២នាក់អង្គុយទល់មុខគ្នា មាន១ករណី ហើយមួយកន្លែងទៀតជាចម្លាស់នៃសិស្ស៦នាក់ទៀត ចំនួនរបៀប $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$	សិស្សគិតរួចឆ្លើយ សិស្សស្ម័គ្រចិត្ត២នាក់សរសេររូបមន្តលើក្តារខៀន
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ (២នាទី)		
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្ស	**លំហាត់** កុមារវិន យកឃ្លី៦ពណ៌ផ្សេងគ្នារៀបជារង្វង់ឱ្យឆ្លាស់ពណ៌គ្នា។តើវិនអាចរៀបបានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា?	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ការណែនាំ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនទី២

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃពុធ ១២កើត ខែ អស្សុជ ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស២៥៦៤ ត្រូវនឹងថ្ងៃទី៣០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ២០២០

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៖ ១១

មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ខ្លឹមសារមេរៀន ៖ ៥. អនុវត្តន៍អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

រយៈពេល៖ ៤៥នាទី

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយពីសិក្សាមេរៀននេះចប់សិស្សទទួលបាន៖

- **វិជ្ជាសម្បទា ៖** កំណត់បានពីរូបមន្ត $A=P(1+i)^n$ បានច្បាស់លាស់តាមរយៈពិភាក្សាជាមួយដៃគូលើលំហាត់ដែលគ្រូឱ្យ។
- **បំណិនសម្បទា៖** ដោះស្រាយចំណោទតាមរូបមន្ត $A=P(1+i)^n$ បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈពិភាក្សាដៃគូរ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ និងយកទៅអនុវត្តន៍ក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ។

II. **សម្ភារឧបទេស**

សៀវភៅគោល គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១(ទំព័រ ៤៣ - ៤៥) LCD សន្លឹកកិច្ចការ

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** តាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១៖ លំនឹងថ្នាក់រៀន (៣នាទី)	
-ពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់និងអនាម័យ	ប្រមូលអារម្មណ៍សិស្ស	-ប្រធានថ្នាក់ឡើង រាយការណ៍ពីអវត្តមាន
	ជំហានទី២៖ រំឭកមេរៀនចាស់ (៥នាទី)	
-គ្រូដាក់លំហាត់ពីរ	១.ដោះស្រាយសមីការ $2^{x+1}=8$ ២.តារាមានប្រាក់១០ម៉ឺនរៀលគាត់ដាក់ប្រាក់សន្សំក្នុងធនាគារដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់២ភាគរយក្នុងមួយខែ។រកប្រាក់ដែលទទួលបាននៅចុងខែទីមួយ។ រួចរកប្រាក់សរុបដែលតារាទទួលបាននៅចុងខែទី១។	-សិស្សឆ្លើយ ១. $x=2$ ២. $I=100000\times0.02=2000$៛ $A=P+I$ $=100000+2000=102000$
	ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣០នាទី)	

-គ្រូដាក់បញ្ហាសិស្សពិនិត្យជារួម -ឱ្យសិស្សស្រង់បញ្ហានិងសម្មតិកម្មជាដៃគូរ	**មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** **៥.អនុវត្តន៍អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** **ចំណោទ៖** បូរ៉ាសន្សំប្រាក់ក្នុងធនាគារចំនួន៥០០០០រៀលដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់៦%ក្នុងមួយខែ។រកប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែ ១,២,៣,៤	- សិស្សអាន និង គិត
	ការប្រាក់=ប្រាក់ដើម ×អត្រាការប្រាក់ $I = P\times i$ ប្រាក់សរុប=ប្រាក់ដើម + ការប្រាក់ $A = P + I$	-រកប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែទី ១,២,៣,៤ **-សម្មតិកម្ម៖** ប្រាក់ដើម A=50000 ៛ អត្រាការប្រាក់ i = 6%= 0.06
-គ្រូពន្យល់បន្ថែមពីរបៀបគណនា	ការប្រាក់នៅចុងខែទី១ $I_1 = P\times i$ ប្រាក់សរុបនៅចុងខែទី១ $A_1 = P + I_1 = P + P\times i = P(1+i)$ ការប្រាក់នៅចុងខែទី២ $I_2 = A_1\times i$ ប្រាក់សរុបនៅចុងខែទី២ $A_2 = A_1 + I_2 + A_1 + A_1\times i$ $= A_1(1+i) = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$ ការប្រាក់នៅចុងខែទី៣ $I_3 = A_2\times i$ ប្រាក់នៅចុងខែទី៣ $A_3 = A_2 + I_3 + A_2 + A_2\times i$ $= A_2(1+i) = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$ ប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែទី៤គឺ $A_4 = A_3 + I_4$ តែ $I_4 = A_3\times i = 59550.8\times 0.06 = 3573.05$ គេបាន $A_4 = 59550.8 + 3573.05 = 63123.85$ ប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែទី៥គឺ $A_5 = A_4 + I_5$	-សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រា

-គ្រូសួរសិស្សៈប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែ ១,២,៣ -គ្រូសម្របសម្រួល ដើម្បីឱ្យសិស្សមានគំនិតទាញរូបមន្ត -គ្រូទាញរូបមន្តដោយសួរសិស្សថា តើនៅចុងឆ្នាំទី n	តែ $I_5 = A_4 \times i = 63123.85 \times 0.06 = 3787.43$ គេបាន $A_5 = 63123.85 + 3787.43 = 66911.28$	- ប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែទី១ $A_1 = P \times I_1$ តែ $I_1 = P \times i$ $= 50000 \times 0.06 = 3000$ គេបាន $A_1 = 50000 + 3000$ $= 53000$ - ប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែទី២ $A_2 = P + I_2$ តែ $I_2 = P \times i$ $= 53000 \times 0.06 = 3180$ គេបាន $A_2 = 53000 + 3180$ $= 56180$ - ប្រាក់សរុបដែលបូរ៉ាទទួលបាននៅចុងខែទី៣ $A_3 = P + I_3$ តែ $I_3 = P \times i$ $= 56180 \times 0.06 = 3370.8$ គេបាន $A_3 = 56180 + 3370.8$ $= 59550.8$ -សិស្សទាញរូបមន្ត $A_n = P(1 + i)^n$ -ប្រាក់នៅចុងឆ្នាំទី៤

គេទទួលបានរូបមន្តយ៉ាងដូចម្តេច ? -គ្រូឱ្យសិស្សពីរនាក់ឡើងអនុវត្តរូបមន្តនៅលើក្តារខៀន ចំពោះការរកប្រាក់សរុបនៅចុងខែទី៤ និង ខែទី៥ ហើយសិស្សផ្សេងទៀតអនុវត្តតាមគំរូខាងលើ។ -គ្រូសម្របសម្រួលរបៀបធ្វើខាងលើ -ឱ្យសិស្សធ្វើសំយោគពីរូបមន្តសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទបែបនេះ។		$A_4 = 50000(1+0.06)^4$ $= 63123.85$ -ប្រាក់នៅចុងឆ្នាំទី៥ $A_5 = 50000(1+\ 0.06)^5$ $= 66911.28$ -សិស្សធ្វើសំយោគពីរូបមន្ត $A = P(1\ +\ i)^n$ ដែល A ជាប្រាក់សរុប P ជាប្រាក់ដើម i ជាអត្រាការប្រាក់ n ជារយៈពេល
ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ (៥នាទី)		
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើជាបុគ្គល -សម្របសម្រួល	-ពូសុខសន្សំប្រាក់ក្នុងធនាគារចំនួន ៥០០០០រៀល ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់៥%ក្នុងមួយឆ្នាំ។រកប្រាក់សរុបដែលពូសុខទទួលបាននៅចុងឆ្នាំទី៩។ **<u>ចម្លើយ</u>** $A = 77566.41$៛	-សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ រកប្រាក់សរុបដែលពូសុខទទួលបាននៅចុងឆ្នាំទី៩តាមរូបមន្ត $A = P(1\ +\ i)^n$ គេមាន $P = 50000$៛ $i = 5\% = 0.05$ n = 9 គេបាន $A = 50000(1+0.05)$ =77566.41
ជំហានទី៥៖ បណ្តាំផ្ញើ ឬកិច្ចការផ្ទះ (២នាទី)		
-ដាក់កិច្ចការផ្ទះឱ្យសិស្ស	-លំហាត់ប្រតិបត្តិក្នុងសៀវភៅគោលថ្នាក់ទី ១១ទំព័រ៤៨	-ស្តាប់ការណែនាំ និងកត់ត្រា

កិច្ចតែងការបង្រៀនទី៣

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃពុធ ១២កើត ខែ អស្សុជ ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស២៥៦៤ ត្រូវនឹងថ្ងៃទី៣០ ខែកញ្ញា

ឆ្នាំ២០២០

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៖ ១២ កម្រិតខ្ពស់

ជំពូកទី៤៖ អាំងតេក្រាលកំណត់

មេរៀនទី១ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់

ខ្លឹមសារមេរៀន ៖ ២. ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់

២.១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ

រយៈពេល៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបានសិក្សាមេរៀននេះចប់ សិស្សទទួលបាន

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** កំណត់ពីរបៀបគណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា៖** ដោះស្រាយបានត្រឹមត្រូវពីរបៀបគណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលំហាត់ពិភាក្សា។
- **ចរិយាសម្បទា៖** បណ្តុះទម្លាប់សិស្សពិភាក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងល្អតាមរយៈការសម្របសម្រួលរបស់គ្រូ។

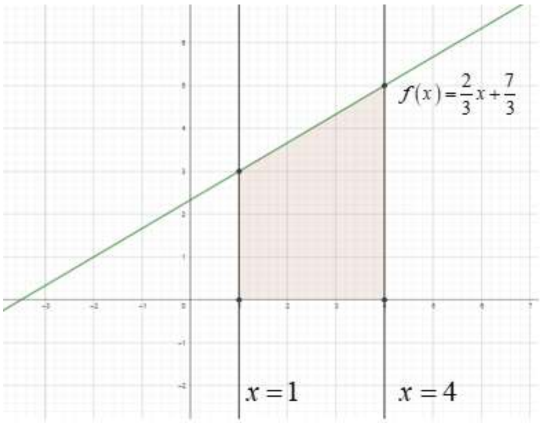
II. **សម្ភារៈឧបទេស៖** ស្លាយLCD សន្លឹកកិច្ចការ បន្ទាត់ក្រិត

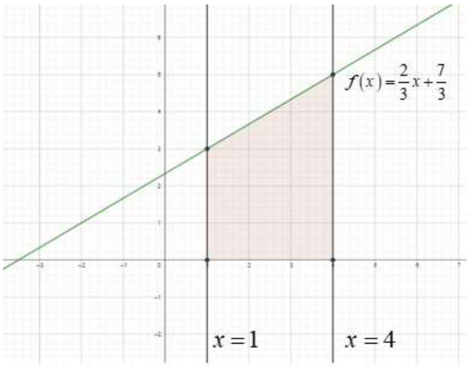
III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** តាមបែបវិធីវិទ្យាសាស្ត្រ

IV. **ដំណើរមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១៖ លំនឹងថ្នាក់រៀន (១នាទី)	
-ពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់និងអនាម័យ	លំនឹងថ្នាក់រៀន	-ប្រធានថ្នាក់ឡើង រាយការណ៍ពីអវត្តមាន
	ជំហានទី២៖ រំឭកមេរៀនចាស់ (៥នាទី)	
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សគណនា -ពិនិត្យមើលការដោះស្រាយរបស់សិស្ស	គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖ ក. $\int_1^2 \frac{4x^5-2x^2+x}{x^2}dx$ ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx$ **ចម្លើយ** ក. $\int_1^2 \frac{4x^5-2x^2+x}{x^2}dx$	-កត់ត្រាចូលក្នុងសៀវភៅ -ដោះស្រាយដោយយកចិត្តទុកដាក់ **ចម្លើយ** ក. $\int_1^2 \frac{4x^5-2x^2+x}{x^2}dx$

<table>
<tr>
<td>-ឱ្យសិស្ស២នាក់ឡើងធ្វើលំហាត់លើក្តារខៀន</td>
<td>$=\int_1^2\left(4x^3-2+\frac{1}{x}\right)dx$
$=[x^4-2x+\ln x]_1^2$
$=(12+\ln 2)-(-1+\ln 0)$
$=13+\ln 2$
ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx$
$=[-\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$
$=-1$</td>
<td>$=\int_1^2\left(4x^3-2+\frac{1}{x}\right)dx$
$=[x^4-2x+\ln x]_1^2$
$=(12+\ln 2)-(-1+\ln 0)$
$=13+\ln 2$
ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx$
$=[-\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$
$=-1$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣០នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>-ដាក់ឧទាហរណ៍ពន្យល់
-ចែកសិស្សជា៥ក្រុម
-ឱ្យសិស្សពិនិត្យមើលផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)$ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=4$ ។

-តើប្អូនអាចដោះស្រាយរកផ្ទៃក្រឡានេះបានដោយរបៀបណា ?
-ឱ្យសិស្សក្នុងក្រុមនីមួយៗបកស្រាយចម្លើយរៀងខ្លួន
-ឱ្យសិស្សគណនាទៅតាមគំនិតក្នុងក្រុមរបស់ពួកគេ</td>
<td>មេរៀនទី១ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់
២. ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់
២.១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាមអនុគមន៍ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ
ឧទាហរណ៍៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ ។ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍នេះរួចគូសបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=4$ ។


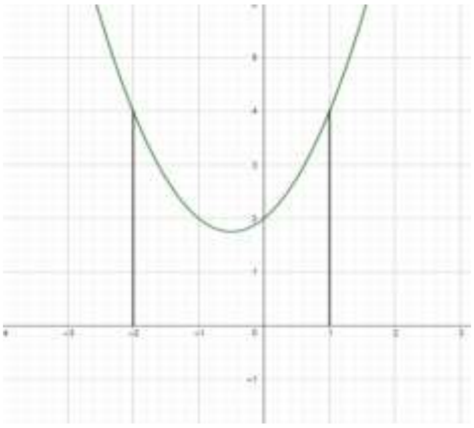
១.កំណត់បញ្ហា
-តើប្អូនដោះស្រាយរកផ្ទៃក្រឡានេះបានដោយរបៀបណា ?
២.បង្កើតសម្មតិកម្ម</td>
<td>-កត់ត្រានិងដោះស្រាយ


-ចូលតាមក្រុមនីមួយៗ
-ពិនិត្យមើល

-ឆ្លើយទៅតាមគំនិតរួមក្នុងក្រុមនិងពន្យល់</td>
</tr>
</table>

-ឱ្យសិស្សរកចំនួនផ្ទៃក្រឡាក្នុងរូបនេះដោយការរាប់ -ឱ្យសិស្សធ្វើការសន្និដ្ឋាន -ឱ្យសិស្សទាញជាទូទៅក្នុងការគណនា	-យើងអាចរកផ្ទៃក្រឡានេះបានដោយការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ **ចម្លើយ** $S=\int_1^4 f(x)dx$ $=\int_1^4\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}\right)dx$ $=\left[\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}x\right]_1^4$ $=\left(\frac{16}{3}+\frac{28}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{3}\right)$ $=\frac{44}{3}-\frac{8}{3}=\frac{36}{3}=12$ **៣.ការធ្វើពិសោធន៍** -ចូររកផ្ទៃក្រឡារូបខាងក្រោម **៤.លទ្ធផលពិសោធន៍** -ផ្ទៃដែលមានជ្រុងជាច់ៗខាងលើមាន ៦ឯកតាហើយត្រូវបានចែកជាពីរតាមអង្កត់ទ្រូង ដូចនេះផ្ទៃដែលយើងចង់រកមាន៣ឯកតា និង ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកខាងក្រោមមាន៩ឯកតា។ **ដូចនេះ**ផ្ទៃក្រឡាសរុបគឺ១២ឯកតា **៥.ការសន្និដ្ឋាន** **ដូចនេះ**ការគណនាផ្ទៃក្រាឡាតាមអាំងតេក្រាលកំណត់ទើបត្រឹមត្រូវ **ជាទូទៅ៖**បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌ ដោយ	-បកស្រាយ -គណនាតាមក្រុមរៀងៗខ្លួន រួចបង្ហាញ **ចម្លើយ** -ដោះស្រាយរួចបង្ហាញចម្លើយ -ផ្ទៃដែលមានជ្រុងជាច់ៗខាងលើមាន៦ឯកតា ហើយត្រូវបានចែកជាពីរតាមអង្កត់ទ្រូង ដូចនេះផ្ទៃដែលយើងចង់រកមាន៣ឯកតា និងផ្ទៃក្រឡាផ្នែកខាងក្រោមមាន ៩ឯកតា។ **ដូចនេះ** ផ្ទៃក្រឡាសរុបគឺ១២ឯកតា **ដូចនេះ** ការគណនាផ្ទៃក្រឡាតាមអាំងតេក្រាលកំណត់ទើបត្រឹមត្រូវ **ជាទូទៅ៖**បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌ ដោយ ក្រាបតាងអនុគមន៍អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង

$f(x)\ge 0$

<table>
<tr><td></td><td>ក្រាបតាងអនុគមន៍អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ $S=\int_a^b f(x)dx$ បើ ។</td><td>$x=b$ កំណត់ដោយ $S=\int_a^b f(x)dx$ បើ ។</td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ(៥នាទី)</td></tr>
<tr><td>-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សអនុវត្ត ពិនិត្យមើលការដោះស្រាយរបស់សិស្ស</td><td>លំហាត់៖ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2+x+2$, អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=-2$ និង $x=1$ ។

ចម្លើយ
$S=\frac{15}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ</td><td>-ពិភាក្សាគ្នាដោះស្រាយលំហាត់
ចម្លើយ
ក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2+x+2$, អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=-2$ និង $x=1$ កំណត់ដោយ
$S=\int_{-2}^{1} f(x)dx$
$=\int_{-2}^{1}(x^2+x+2)dx$
$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$
$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+2-4\right)$
$=3+\frac{1}{2}+4$
$S=\frac{15}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី៥៖ បណ្ដាំផ្ញើ ឬកិច្ចការផ្ទះ (៣នាទី)</td></tr>
<tr><td>-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ</td><td>លំហាត់៖ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=3-2x$ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=-1$ និង $x=1$ ។</td><td>-កត់ត្រាលំហាត់ដាក់សៀវភៅ</td></tr>
</table>

មេរៀនទី២ ៖ ស្វ៊ីត និងស៊េរី

២.១ ផលសងនៃស្វ៊ីត

ចំណេះដឹងដំបូង

- **ស្វ៊ីតនព្វន្ត៖** $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មាន a_1 ជាតួទី1 និង d ជាផលសងរួម នោះ តួទី n គឺ $a_n = a_1 + (n-1)d$ និង ផលបូក n តួដំបូងគឺ $s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$.
- **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ៖** $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មាន a_1 ជាតួទី1 និង r ជាផលធៀបរួម នោះ តួទី n គឺ $a_n = a_1.r^{n-1}$ និង ផលបូក n តួដំបូងគឺ $s_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad (r \neq 1)$
- **ផលបូកលំដាប់ខ្ពស់**
  - $1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$
  - $1+3+5+7+...+(2n-1) = n^2$
  - $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
  - $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$
- **ផលសងស្វ៊ីត៖** $\{b_n\}$ ផលសងស្វ៊ីតលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}$

$\{b_n\}: b_1, b_2, b_3, ..., b_n$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n$ ឬ $a_{n+1} = a_n + b_n$

- ចំពោះ $n \geq 2$ យើងបាន

$$+\begin{cases} a_2 = a_1 + b_1 \\ a_3 = a_2 + b_2 \\ a_4 = a_3 + b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1}$$
$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $b_{n-1} = b_0$ មិនមាន

- តាង $\{c_n\}$ ផលសងលំដាប់ទី2 នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺជាផលសងតួលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n,\ n = 1,2,3,...$ ដែលមានតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$.។

សម្រាយដូចខាងលើ ។

ឧទាហរណ៍២.១.១ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $2,4,8,14,22,32,...$

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

ចម្លើយ ក. តាងស្វ៊ីត $\{a_n\}$: $2,4,8,14,22,32,...$

តាង $\{b_n\}$ ជាផលសងលំដាប់ទី1 នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណាត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$

យើងបាន $\{b_n\}: 2,4,6,8,...$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ ស្មើ 2 និងផលសងរួមស្មើ 2

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

- ចំពោះ $n \geq 2$ យើងបាន

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$
$$= 2 + 2.\frac{1}{2}n(n-1) = 2 + n^2 - n$$

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $a_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$

ខ. តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត យើងបាន

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k + 2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{3}n(n^2 + 5)$

ឧទាហរណ៍ ២.១.២ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $4,18,48,100,180,294,...$

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

ចម្លើយ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $4,18,48,100,180,294,...$

តាង ស្វ៊ីត $\{a_n\}$: $4,18,48,100,180,294,...$

$\{b_n\}$ ជាផលសងតួលំដាប់ទី១នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$

$\{b_n\}: 14,30,52,80,114,...$

តាង $\{c_n\}$ ជាផលសងតួលំដាប់ទី២ នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ យើងបាន

$\{c_n\}: 16,22,28,34,...$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ ស្មើ 16 និងផលសងរួមស្មើ 6

យើងបាន $c_n = 16 + 6(n-1) = 16 + 6n - 6 = 6n + 10$

- ចំពោះ $n\geq 2$ យើងបាន $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k\ =14+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+10)$

$$=14+10n-10-3n(n-1)$$

$$b_n=4+7n+3n^2$$

- ចំពោះ $n\geq 2$ យើងបាន $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4+7k+3k^2)$$

$$=a_1+7\sum_{k=1}^{n-1}k+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+4(n-1)$$

$$=4+7\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+4n-4$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)(2n^2+6n)+4n$$

$$a_n=n^3+2n+n$$

ក. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+3n+4+8n+6)$$

$$S_n=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+10)$$

លំហាត់ទី២.១.១ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $1,2,5,10,17,\ldots$

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

លំហាត់ទី២.១.២ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}: p,q,p,q,p,q,\ldots$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}:1,2,6,15,31,56,\ldots$

២.២ ផលបូកនៃស្វ៊ីត

ឧទាហរណ៍២.២.១ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទី n ស្មើនឹង $\frac{1}{n(n+1)}$

ចម្លើយ៖

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1+n-n}{n(n+1)}=\frac{1+n}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n}{n+1}$

ឧទាហរណ៍ ២.២.២ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\dfrac{1}{1.3},\dfrac{1}{2.4},\dfrac{1}{3.5},\cdots$

ចម្លើយ: $a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+2-n}{n(n+2)}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{1.3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)\\ \dfrac{1}{2.4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\\ \dfrac{1}{3.5}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)\\ \dfrac{1}{n.(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\end{cases}$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២.២.៣ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមដែលមានតួទី n ៖

ក. $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ខ. $a_n=\dfrac{5n+4}{n(n+1)(n+2)}$

ចម្លើយ ក. $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ពិនិត្យ $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+2)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ (សម្រាយក្នុងលំហាត់ខាងលើ)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

ពិនិត្យ $\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4.5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$$

ខ. $a_n=\frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)}$

ដោយ $\frac{5k+4}{k(k+1)(k+2)}=\frac{4k+4+k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{4}{n(n+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=3-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$S_n=\frac{7}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{3}{n+2}$$

លំហាត់២.២.៤ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\{a_n\}:1,\frac{1}{1+2},\frac{1}{1+2+3},\dots,\frac{1}{1+2+3+\dots+n}$

ខ. $\{b_n\}:\frac{1}{(1\times 3)^2},\frac{2}{(3\times 5)^2},\frac{3}{(5\times 7)^2},\dots,\frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

ចម្លើយ ក. $\{a_n\}: 1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \ldots, \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

ដោយ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ យើងមាន $a_k = \frac{1}{1+2+3+\ldots+k} = \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)}$

នាំឲ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 2 \cdot \frac{n}{n+1}$ (តាមឧទាហរណ៍ខាងលើផលបូកតួនៃស៊ីត)

ដូចនេះ $S_n = \frac{2n}{n+1}$

ខ. $\{b_n\}: \frac{1}{(1\times 3)^2}, \frac{2}{(3\times 5)^2}, \frac{3}{(5\times 7)^2}, \ldots, \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

$$b_n = \frac{n}{\left[(2n-1)(2n+1)\right]^2}$$

$$b_n = \frac{a}{(2n-1)^2} - \frac{b}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{4an^2 - 4bn^2 + 4an + 4bn + a - b}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

យើងបាន $\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases}$ នោះ $a = b = \frac{1}{8}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{(1\times 3)^2} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \\ \frac{1}{(3\times 5)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) \\ \frac{1}{(5\times 7)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{(2n+1-1)(2n+1+1)}{(2n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2n \cdot 2(n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{n^2+n}{2(2n+1)^2}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n^2+n}{(2n+1)^2}$

លំហាត់២.២.៥ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\{a_n\}:\frac{1}{1+\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}},...,\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}},...$

ខ. $\{b_n\}:\sqrt{3-2\sqrt{2}},\sqrt{5-2\sqrt{6}},\sqrt{7-2\sqrt{12}},...,\sqrt{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}},...$

ចម្លើយ ក. $\{a_n\}:\frac{1}{1+\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}},...,\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}},...$

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-k-1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}\\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right)=\sqrt{n+1}-1$$

ដូចនេះ $S_n=\sqrt{n+1}-1$ ។

ខ. $\{b_n\}:\sqrt{3-2\sqrt{2}},\sqrt{5-2\sqrt{6}},\sqrt{7-2\sqrt{12}},...,\sqrt{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}},...$

$$b_k=\sqrt{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}}=\sqrt{\left(\sqrt{k+1}\right)^2-2\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k}+\left(\sqrt{k}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$+\begin{cases}\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\\ \sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2k+1-\sqrt{k(k+1)}}\right)=\sqrt{n+1}-1$$

ដូចនេះ $S_n=\sqrt{n+1}-1$ ។

លំហាត់២.២.៦ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}:\frac{1}{2!},\frac{2}{3!},\frac{3}{4!},\frac{4}{5!},\cdots,\frac{n}{(n+1)!}$

$$a_k=\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k-1+1}{(k+1)!}=\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2!}\\ \frac{2}{3!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{(n+1)!-1}{(n-1)!}$ ។

សំណួរបន្ថែម (Additional questions)

១. ក. បើអនុគមន៍ $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ ចូររកតម្លៃ a,b និង c ។

ខ. រកតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n}2^k k^2$

គ. រកតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n}2^k k$

២. យកចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនអាចចែកដាច់នឹង 2 និង 3 ហើយបង្កើតបានជាស្វ៊ីតមួយ $\{a_n\}: a_1,a_2,...,a_n,...$ ដោយតំរៀបពីតូចទៅធំ។ដូចនេះស្វ៊ីត $\{a_n\}: 1,5,7,11,13,17,...$

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

ខ.រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

៣. ឧបមាថាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតមួយ $\{a_n\}$ គឺ $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+5)$ ។

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{3}$

ចម្លើយ ១. ក. $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$ ដែល $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ រកតម្លៃ a,b និង c

$$-\begin{cases}f(x+1)=2^{(x+1)}\left(ax^2+(2a+b)x+a+b+c\right)\\ f(x)=2^x\left(ax^2+bx+c\right)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=2^{(x+1)}\left(ax^2+(2a+b)x+a+b+c\right)-2^x\left(ax^2+bx+c\right)\\&=2^x\left(2ax-ax^2+2(2a+b)x-bx+2a+2b+2c-c\right)\\&=2^x\left(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c\right)\end{aligned}$$

ដោយ $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ យើងបាន

$2^x\left(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c\right)=2^x x^2$ យើងបាន

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=6 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a=1, b=-4, c=6$

ខ. រកតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2$

តាង $f(n)=2^n\left(n^2-4n+6\right)$

$$f(n+1)=2^{n+1}\left((n+1)^2-4(n+1)+6\right)=2^{n+1}\left(n^2-2n+3\right)$$

$$f(n+1)-f(n)=2^n n^2$$

$$+\begin{cases} f(2)-f(1)=2^1\cdot 1^1 \\ f(3)-f(2)=2^2\cdot 2^2 \\ f(4)-f(3)=2^3\cdot 3^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(n)-f(n-1)=2^{n-1}(n-1)^2 \\ f(n+1)-f(n)=2^n n^2 \end{cases}$$

$$f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2 = f(n+1)-f(1)=2^n\left(n^2-2n+3\right)-6$

គ. រកតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} 2^k k$

- **របៀបទី១**

តាង $f(x)=2^x(ax+b)$

$$f(x+1)=2^{x+1}(ax+a+b)$$

ដោយ $f(x+1)-f(x)=2^x x$ នោះ $a=1, b=-2$

ដូចនេះ $f(x)=2^x(x-2)$

$$+\begin{cases} f(2)-f(1)=2^1\cdot 1 \\ f(3)-f(2)=2^2\cdot 2 \\ f(4)-f(3)=2^3\cdot 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(n)-f(n-1)=2^{n-1}(n-1) \\ f(n+1)-f(n)=2^n n \end{cases}$$

$$f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n} 2^k k$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} 2^k k = f(n+1)-f(1)=2^{n+1}(n-1)+2$

- **របៀបទី២**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k k = 2.1 + 2^2.2 + 2^2.3 + \ldots + 2^n.n$$

$$2S_n = 2\sum_{k=1}^{n} 2^k k = 2^2.1 + 2^3.2 + 2^4.3 + \ldots + 2^{n+1}.n$$

$$2S_n - S_n = 2^2.1 + 2^3.2 + 2^4.3 + \ldots + 2^{n+1}.n - 2.1 - 2^2.2 - 2^2.3 - \ldots - 2^n.n$$

$$S_n = -2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \ldots - 2^n + 2^{n+1}.n$$

$$= -2\frac{1-2^n}{1-2} + 2^{n+1}n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

ដូចនេះ $s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k k = (n-1)2^{n+1} + 2$

២. ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនអាចចែកដាច់នឹង 2 និង 3 ផង $\{a_n\}: 1, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n$ ជាផលសងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

$\{b_n\}: 4, 2, 4, 2, \ldots$

- ចំពោះ $n \geq 2$ យើងបាន $b_n = \frac{1}{2}\left[(4+2) + (-1)^{n-1}(4-2)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[6 + (-1)^{n-1}.2\right] = 3 + (-1)^{n-1}$$

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left[3 + (-1)^{k-1}\right]$$

$$= a_1 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}$$

$$= 3n - 2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k$$

$$= 3n - 2 - \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{n-1}\right]$$

- បើ n ជាចំនួនសេស នោះ $(n-1)$ ជាចំនួនគូ ហើយ $(-1)^{n-1} = 1$

$$a_n = 3n - 2 + \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{n-1}\right]$$

$$= 3n - 2 + \frac{1}{2}(1-1) = 3n - 2$$

ដូចនេះបើ n ជាចំនួនសេសនោះ $a_n = 3n - 2$

- បើ n ជាចំនួនគូ នោះ $(n-1)$ ជាចំនួនសេស ហើយ $(-1)^{n-1} = -1$

$$a_n = 3n - 2 + \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{n-1}\right]$$

$$= 3n - 2 + \frac{1}{2}\left[1 - (-1)\right] = 3n - 1$$

ដូចនេះបើ n ជាចំនួនគូនោះ $a_n = 3n - 2$

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

យើងមាន $a_n = 3n-2+\frac{1}{2}\left[1-(-1)^{n-1}\right]$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left[3k-2+\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{k-1}\right)\right]$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k - 2n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}$$

$$= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}\left(1-(-1)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{4}\left(1-(-1)^{n-1}\right)$$

- បើ n ជាចំនួនគូ នោះ $(n-1)$ ជាចំនួនសេស ហើយ $(-1)^{n-1} = -1$

$$S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{4}(1+1)$$

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(3n^2-1\right)$$

ដូចនេះបើ n ជាចំនួនគូនោះ $s_n = \frac{1}{2}\left(3n^2-1\right)$

- បើ n ជាចំនួនសេស នោះ $(n-1)$ ជាចំនួនគូ ហើយ $(-1)^{n-1} = 1$

$$s_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{4}(1-1) = \frac{3}{2}n^2$$

ដូចនេះបើ n ជាចំនួនគូនោះ $s_n = \frac{3}{2}n^2$

៣. ឧបមាថាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតមួយ $\{a_n\}$ គឺ $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+5)$

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

- **របៀបទី១**

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+5)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)$$

$$= \frac{6}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+4k) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ដូចនេះ $a_n = 3n^2 + 4n$

- **របៀបទី២**

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1}$$

យក $S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - \cdots - a_{n-1} = a_n$

ដូចនេះ $S_n - S_{n-1} = a_n$

$$-\begin{cases} S_n = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+5) \\ S_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)n(2n+3) \end{cases}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+5) - \frac{1}{2}n(n-1)(2n+3)$$

$$= \frac{1}{2}n\left(2n^2 + 7n + 5 - 2n^2 - n + 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}n(6n+8)$$

ដូចនេះ $a_n = 3n^2 + 4n$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{3}$

យើងមាន $a_n = 3n^2 + 4n = n(3n+4)$

នោះ $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{n(3n+3+1)} = \frac{1}{n(3n+3)+n} = \frac{1}{3n(n+1)+n}$

ដោយ $\frac{1}{3n(n+1)+n} < \frac{1}{3n(n+1)}$

$$+\begin{cases} \frac{1}{3.1.2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{3.2.3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3.3.4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{3(n-1)n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

ដោយ $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 1$ នោះ $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{3}$

នាំឲ្យ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{3}$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{3n(n+1)+n} < \frac{1}{3n(n+1)}$ នោះ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k(k+1)+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k(k+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(3k+4)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(k+1)}<\frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{3}$ (ពិត)

២.៣ ទំនាក់ទំនងកំណើន

និយមន័យ៖ ទំនាក់ទំនងកំណើនគឺជាច្បាប់ដែលកំណត់តួ a_{n+1} នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដែលគេច្រើនតាងដោយ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ដូចដែលបានបង្ហាញពីមុន។

បើស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន នោះយើងអាចថាស្វ៊ីតនោះកំណត់តាមកំណើន។

និយមន័យអនុមាន គឺជានិយមន័យនៃស្វ៊ីតមួយដែលបញ្ជាក់តួទី១វា និងអាល់កូរីតមួយដើម្បីទាញរកតួណាមួយពីផ្នែកខាងមុខវា។

ឧទាហរណ៍ ២.៣.១. ស្វ៊ីតនព្វន្ត $1,3,5,7,...$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2$ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3,6,12,24,...$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1=3, a_{n+1}=2a$

x^n គេកំណត់តាមទំនាក់ទំនងកំណើនដោយ $x^1=x,\ x^{n+1}=x.x^n$ មានន័យថា $a_1=x, a_{n+1}=2a_n$

$n!$ កំណត់តាមទំនាក់ទំនងកំណើនដោយ $(n+1)!=(n+1).n!$ មានន័យថា $a_1=1, a_{n+1}=(n+1)a_n$

បើស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់តាមទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1=1, a_{k+1}=2a_k+3$ នោះ៖

$$\begin{aligned}
&a_1=1\\
&a_2=2a_1+3=2\times1+3=5\\
&a_3=2a_2+3=2\times5+3=13\\
&\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\
&\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\
&\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\
&a_n=2a_{n-1}+3
\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២.៣.១ បើស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម ចូររកតួទី៥នៃស្វ៊ីតទាំងនេះ។

ក. $a_1=100, a_{n+1}=a_n-5$ ខ. $a_1=2, a_{n+1}=3a_n+2$

ចម្លើយ រកតួទី៥នៃស្វ៊ីត

ក. $a_1=100, a_{n+1}=a_n-5$

$a_2=a_1-5$

$a_3 = a_2 - 5 = a_1 - 5 - 5 = a_1 - 2\times 5$

$a_4 = a_4 - 5 = a_1 - 3\times 5 - 5 = a_1 - 4\times 5 = 100 - 20 = 80$

ដូចនេះ $a_5 = 80$

ខ. $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_2 = 3a_1 + 2$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3(3a_1 + 2) + 2 = 3\times 3a_1 + 3\times 2 + 2$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3(3\times 3a_1 + 3\times 2 + 2) = 3\times 3\times 3a_1 + 3\times 3\times 2 + 3\times 2 + 2$

$a_5 = 3a_4 + 2 = 3(3\times 3\times 3a_1 + 3\times 3\times 2 + 3\times 2 + 2) + 2 = 242$

ដូចនេះ $a_5 = 242$

ឧទាហរណ៍ ២.៣.២ បើ $\{a_n\}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

ចូររកតួទី n នៃស៊ីតនេះ។

របៀបដោះស្រាយ $a_{k+1} = pa_k + q$

បើទំនាក់ទំនងកំណើនមានទម្រង់

$a_{k+1} = pa_k + q \quad (p, q$ ថេរ$)$

នោះពិចារណាសមីការ $c = pc + q$

និងបម្លែងទំនាក់ទំនងទៅជា

$a_{k+1} - c = p(a_k - c)$

ចម្លើយ $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

រកតួទី នៃស៊ីតនេះ

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k = 3 \\ c = 2c + 3 \end{cases}$$
$$\overline{a_{k+1} - c = 2(a_k - c)} \qquad (*)$$

យើងមាន $c = 2c + 3 \Rightarrow c = -3$ ជំនួសក្នុង $(*)$

$(*)\ a_{k+1} + 3 = 2(a_k + 3)$

ដោយ $\{a_k + 3\}$ តួទី១ $a_1 + 1 = 1 + 3 = 4$ និងផលធៀបរួមស្មើ 2

យើងបាន $(a_k + 3) = (a_1 + 3)2^{k-1} = 2^{k+1}$ នោះ $a_k = 2^{k+1} - 3$

ដូនេះតួទី n គឺ $a_n = 2^{k+1} - 3$

លំហាត់ទី ២.៣.៣ បើស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម៖

ក. $a_1 = 5$, $a_{k+1} = 2a_k + 3$ ខ. $a_1 = 2, a_{k+1} = 3a_k + 1$

រកតួទី n នៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ក. $a_1 = 5$, $a_{k+1} = 2a_k + 3$

$$(-)\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k + 3 \\ c = 2c + 3 \end{cases}$$

$$a_{k+1} - c = 2(a_k - c) \qquad (*)$$

ដោយ $c = 2c + 3 \Rightarrow c = -3$ ជំនួសក្នុង $(*)$ យើងបាន $a_{k+1} + 3 = 2(a_k + 3)$

តាង $\{b_k\} = \{a_k + 3\}$, $\{b_k\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ $b_1 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$ និងផលធៀបរួមស្មើនឹង 2 នោះ តួទី k នៃស្វ៊ីត $\{b_k\}$ គឺ $b_k = 8.2^{k-1} = 2^{k+2}$

ដោយ $b_k = a_k + 3$ និង $b_k = 2^{k+2}$

$a_k + 3 = 2^{k+2}$ ឬ $a_k = 2^{k+2} - 3$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ $a_n = 2^{n+2} - 3$

ខ. $a_1 = 2, a_{k+1} = 3a_k + 1$

$$-\begin{cases} a_{k+1} = 3a_k + 1 \\ c = 3c + 1 \end{cases}$$

$$a_{k+1} - c = 3(a_k - c) \qquad (*)$$

ដោយ $c = 3c + 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

$$a_{k+1} + \frac{1}{2} = 3\left(a_k + \frac{1}{2}\right)$$

តាង $\{b_k\} = \left\{a_k + \frac{1}{2}\right\}$, $\{b_k\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ $b_1 = a_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ និងមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 3 នោះតួទី k នៃស្វ៊ីត $\{b_k\}$ គឺ $b_k = \frac{5}{2}.3^{k-1}$

ដោយ $b_k = \frac{5}{2}.3^{k-1}$ និង $b_k = a_k + \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{5}{2}.3^{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(5.3^{n-1} - 1\right)$

ឧទាហរណ៍៖ បើស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k, \quad n = 1, 2, 3, 4, ...$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ៖ $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k \quad (n = 1, 2, 3, 4, ...)$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

$a_{k+1} = a_k + 2k$ នោះ $a_{k+1} - a_k = 2k$

យើងតាង $b_k = a_{k+1} - a_k = 2k$

- បើ $n \geq 2$ យើងបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ (តាមផលសងនៃស្វ៊ីត)

$$=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=1+2.\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=1+n(n-1)$$

- បើ $n=1$ យើងបាន $a_1=1+0=1$ (ពិត)

ដូចនេះ $a_n=1-n+n^2$

លំហាត់ ២.៣.៣៖ បើស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម ៖

ក. $a_1=0, a_{n+1}=a_n+n^2$

ខ. $a_1=3, a_{n+1}=a_n+n^2$

រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ៖ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ក. $a_1=0, a_{n+1}=a_n+n^2$

$a_{n+1}=a_n+n^2$ នោះ $a_{n+1}-a_n=n^2$

តាង $b_n=a_{n+1}-a_n=n^2$

- បើ $n\geq 2$ យើងបាន $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ (តាមផលសងស្វ៊ីត)

$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)(2n-1)n$$

- បើ $n=0$ យើងបាន $a_0=\frac{1}{6}(-1)(-1)0=0$ ពិត

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{6}(n-1)(2n-1)n$

ខ. $a_1=3, a_{n+1}=a_n+2^n$

$a_{n+1}=a_n+2^2$ នោះ $a_{n+1}-a_n=2^n$

តាង $b_n=a_{n+1}-a_n=2^n$

- បើ $n\geq 2$ យើងបាន $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$ (តាមផលសងស្វ៊ីត)

$\sum_{k=1}^{n-1}2^k$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ ស្មើនឹង 2 និងផលធៀបរួមស្មើ 2

នោះយើងបាន $\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

$$\Rightarrow a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\left(2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}\right)$$

$$=3+2\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^n+1$$

- ចំពោះ $n=0$ យើងបាន $a_1=2^1+1$ (ពិត)

ដូចនេះ $a_n=2^n+1$

លំហាត់ ២.៣.៤. គេមាន $\{a_n\}$ ដែល $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n$

ក. តាង $b_n=2^n a_n$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ។

ចម្លើយ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

តាង $b_n=2^n a_n$ នោះ $b_n=2^2 a_n$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2^{n+1}a_{n+1} \\ &= 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}a_n+n\right), \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n \\ &= 2^{n+1}\frac{1}{2}a_n+2^{n+1}n \\ &= 2^n a_n+2^{n+1}n \\ &= b_n+2^{n+1}n \end{aligned}$$

ដូចនេះ $b_{n+1}=b_n+2^{n+1}\cdot n$ នោះ $b_{n+1}-b_n=2^{n+1}\cdot n$

តាង $c_n=b_{n+1}-b_n=2^{n+1}\cdot n \qquad (n\ge 2)$

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k \text{ (តាមផលសងស្វ៊ីត)} \\ &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}\cdot k = 2^1 a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}\cdot k \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}\cdot k \end{aligned}$$

$$S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}\cdot k$$

$$(-)\begin{cases} S_{n-1}=1\times 2^2\times 2\times 2^3\times 3\times 2^4+\ldots+(n-1)\times 2^n \\ 2S_{n-1}=1\times 2^2\times 2\times 2^3\times 3\times 2^4+\ldots+(n-1)\times 2^{n+1} \end{cases}$$

$$-S_{n-1}=2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n-(n-1)\times 2^{n+1}$$

$$S_{n-1}=(n-1)\times 2^{n+1}-\left(2^2+2^2+2^4+\ldots+2^n\right)=(n-1)\times 2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$$

$\sum_{k=1}^{n-1}2^k=\left(2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n\right)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានតួទី១ស្មើ 2^2 និងផលធៀបរួមស្មើ 2

$$\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^2\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2-1}=2^2\left(2^{n-1}-1\right)=2^{n+1}-4$$

$$S_{n-1}=(n-1)2^{n+1}-2^{n+1}+4=4+(n-2)2^{n+1}$$

$$S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}.k$$

$$b_n=2+S_{n-1}=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}.k=2+4+(n-2)2^{n+1}=6+(n-2)2^{n+1}$$

- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $b_1=6+(1-2)2^2=6-4=2$ (ពិត)

ដូចនេះ $b_n=6+(n-2)2^{n+1}$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

យើងមាន $b_n=2^na_n$

ដោយ $b_n=6+(n-2)2^{n+1}$ នោះ $2^na_n=6+(n-2)2^{n+1}$

$$a_n=\frac{6+(n-2)2^{n+1}}{2^n}=(n-2)2^n+\frac{6}{2^n}$$

ដូចនេះ $a_n=(n-2)2^n+\frac{6}{2^n}$

លំហាត់ ២.៣.៥ ស្វ៊ីត $\{a_n\}:a_1=p,2a_{n+1}+a_n-3n-2=0$ (p ចំនួនថេរវិជ្ជមាន)

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ខ. រកតម្លៃ p ដែលធ្វើឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

<u>ចម្លើយ</u> ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

$$\{a_n\}:a_1=p,2a_{n+1}+a_n-3n-2=0$$

យើងតាង $2a_{n+1}+a_n-3n-2=0$

នោះ $2a_{n+1}=-a_n+3n+2$

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3n+2}{2}$$

បើយើងតាង $b_n=(-2)^na_n$ នោះ $b_1=-2a_1=-2p$

$b_n=(-2)^na_n$ នោះ $a_n=\dfrac{b_n}{(-2)^n}$

$$b_{n+1}=(-2)^{n+1}a_{n+1}$$

$$=(-2)^{n+1}\left(-\frac{1}{2}a_n+\frac{3n+2}{2}\right)$$

$$=(-2)^{n+1}\left(-\frac{1}{2}a_n+(-2)^{n+1}\frac{3n+2}{2}\right)$$

$$=(-2)^na_n+(3n+2)(-2)^n(-2).\frac{1}{2}$$

$$b_{n+1}=b_n-(3n+2)(-2)^n$$

យើងបាន $b_{n+1}-b_n=-(3n+2)(-2)^n$

តាង $c_n = b_{n+1} - b_n = -(3n+2)(-2)^n$

- ចំពោះ $n \ge 1$ យើងតាង

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \text{ (តាមផលសងនៃស្វ៊ីត)}$$

$$= -2p - \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)(-2)^k, \quad (b_1 = -2p)$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)(-2)^k$$

$$(-)\begin{cases} S_{n-1} = (-2)\times 5(-2)^2\times 8 + (-2)^2\times 11 + \dots\dots\dots + (-2)^{n-1}\times(3n-1) \\ (-2)S_{n-1} = (-2)^2\times 5 + (-2)^3\times 8 + (-2)^4\times 11 + \dots\dots\dots + (-2)^{n-1}\times(3n-4) + (-2)^n\times(3n-1) \end{cases}$$

$$3S_{n-1} = -10 + 3.(-2)^2 + 3.(-2)^3 + \dots\dots\dots + 3(-2)^{n-1} - (3n-1).(-2)^n$$

$$S_{n-1} = -\frac{10}{3} + (-2)^2 + (-2)^3 + \dots\dots\dots + (-2)^{n-1} - \frac{(3n-1)}{3}.(-2)^n$$

$(-2)^2 + (-2)^3 + \dots . + (-2)^{n-1}$ ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានតួទី១ស្មើ -2 និងផលធៀបរួមស្មើ -2

$$(-2)^2 + (-2)^3 + \cdots + (-2)^{n-1} = (-2)^2\frac{1-(-2)^{n-2}}{1-(-2)} = \frac{4}{3}\left(1-(-2)^{n-2}\right)$$

$$S_{n-1} = -\frac{10}{3} + \frac{4}{3}\left(1-(-2)^{n-2}\right) - \frac{(3n-1)}{3}(-2)^n$$

$$= -2 - \frac{1}{3}(-2)^n - (-2)^n n + \frac{1}{3}(-2)^n$$

$$S_{n-1} = -2 - (-2)^n n$$

យើងបាន $b_n = -2p + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = -2p + S_{n-1}$

$$= -2p + 2 + (-2)^n n$$

ដូចនេះ $b_n = -2p + 2 + (-2)^n n$

ដោយ $b_n = (-2)^n a_n$ ហើយ $b_n = -2p + 2 + (-2)^n n$

យើងបាន $(-2)^n a_n = -2p + 2 + (-2)^n n$

$$a_n = -\frac{2p}{(-2)^n} + \frac{2}{(-2)^n} + \frac{(-2)^n n}{(-2)^n}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{n-1}}(p-1) + n$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p-1) + n$$

- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $a_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^0(p-1) + 1 = p$ (ពិត)

ដូចនេះ $a_n = n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p-1)$

2) រកតម្លៃនៃ p ដែលធ្វើឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

$\{a_n\};\ a_1 = p,\ a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(p-1)+n$

$\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកាលណា $p=1$

២.៤ ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

ឧបមាថា S_n គឺជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $S_n - S_n = a_n$

នោះ $S_n = a_1 + a_2 + \dots\dots. + a_{a-1} + a_n$

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots\dots. + a_{a-1}$

- ចំពោះ $n \ge 2$ យើងបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ ដែល $S_1 = a_1$

ចំពោះ $n \ge 2$

$S_n - S_n = a_n$

ឧទាហរណ៍ ២.៤.១. បើផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $S_n - S_n = a_n$ គឺ $S_n = n^2 + n$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

<u>**ចម្លើយ**</u> យើងមានផលបូក n តួដំបូងនៃ $S_n - S_n = a_n$ គឺ $S_n = n^2 + n$

- ចំពោះ $n \ge 2$ យើងបាន

$$(-)\begin{cases} S_n = n^2 + n \\ S_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 \end{cases}$$

$$S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - n + 1$$

ដោយ $S_n - S_{n-1} = a_n$ យើងបាន

$$a_n = n^2 + n - (n-1)^2 - n + 1$$
$$= n^2 + n - n^2 + 2n - 1 - n + 1$$

ដូចនេះ $a_n = 2n$

- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $S_1 = 1^2 + 1 = 2$ (ពិត ព្រោះ $S_1 = a_1 = 2$)

លំហាត់ ២.៤.១. បើផលបូក n តួដំបូងនៃ $\{a_n\}$ គឺ $S_n = n^3 + 2n$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

<u>**ចម្លើយ**</u> សម្មតិកម្ម $\{a_n\}:\ S_n = n^3 + 2n$

ដោយ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= n^3 + 2n - (n-1)^3 - 2(n-1)$$
$$= n^3 + 2n = 2n + 2 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1$$
$$= 3n^2 - 3n + 3$$

ដូចនេះ $a_n = 3n^2 - 3n + 3$

ឧទាហរណ៍ ២.៤.២. ឧបមាថា $S_n = 4 - a_n - \dfrac{1}{2^{n-2}}$ $(n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots.)$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $S_n - S_n = a_n$

ក. រកទំនាក់ទំនងកំណើតរវាង a_{n+1} និង a_n

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

<u>**ចម្លើយ**</u> ក. រកទំនាក់ទំនងកំនើនរវាង a_{n+1} និង a_n

សម្មតិកម្ម $\{a_n\}: S_n = 4 - a_n - \dfrac{1}{2^{n-2}}$

S_n និង S_{n+1} មានភាពចាំបាច់ដើម្បីរក a_{n+1}

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$$S_{n+1}=4-a_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$(-)\begin{cases}S_{n+1}=4-a_{a+1}-\dfrac{1}{2^{n-1}}\\ S_n=4-a_n-\dfrac{1}{2^{n-2}}\end{cases}$$

$$S_{n+1}-S_n=a_n-a_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

ដោយ $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$

នោះ $a_{n+1}=a_n-a_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}$

$$2a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$2a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2^n.2^{-1}}+\frac{1}{2^n.2^{-2}}$$

$$=a_n-\frac{2}{2^n}+\frac{4}{2^n}$$

$$=a_n+\frac{1}{2^{n-1}}$$

ដូចនេះ $2a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^{n-1}}$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ដោយ $S_1=a_1$ នោះ $S_1=4-a_1-\frac{1}{2^{-1}}$

$$a_1=4-a_1-2\Rightarrow a_1=1$$

តាម (ក) *យើងមាន* $2a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^{n-1}}$

*គុណទំនាក់ទំនងខាង*លើនឹង 2^n

យើងបាន $2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+2$

តាង $b_n=2^n a_n$ នោះ $b_{n+1}-b_n=2$

ដូចនេះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ស្មើនិង $b_1=2a_1=2$ និងផលសងរួមស្មើនឹង 2

យើងបាន $b_n=2+2(n-1)=2n$

ដោយ $b_n=2^n.a_n \Rightarrow 2n=2^n a_n \Rightarrow a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$

លំហាត់ ២.៤.២. ឧបមា S_n គឺជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដែលមាន $a_1=1$។

បើ S_n និង a_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$ $(n\geq 2)$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$។

តម្រុយ រក a_k តាម S_k, $a_k=S_k-S_{k-1}\ (k\geq 2),\ \ S_1=a_1=1$

$$a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}\Rightarrow(2S_n-1)a_n=2S_n^2$$

$$2a_ns_n-a_n=2s_n^2$$

$$a_n=2s_n(a_n-s_n)$$

ដោយ $a_n=S_n-S_n-1\Rightarrow S_n-S_{n-1}=-2S_nS_{n-1}$

$$\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n.S_{n-1}}=-2$$

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=-2$$

ដូចនេះ $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី ១ស្មើ $\frac{1}{S_1}=1$ និងផលសងរួមស្មើនឹង 2

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{S_1}+2(n-1)=1+2n-2=2n-1\qquad\Rightarrow S_n=\frac{1}{2n-1}$$

ដោយ $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}=\frac{2n-3-2n+1}{(2n-3)(2n-1)}$

ដូចនេះ $a_n=-\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$

ឧទាហរណ៍ ២.៤.៣ ឧបមាថា S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដែល

$S_1=1,\ S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1,\quad(n\ge 1)$

ក. តាង $b_n=\frac{a_n}{2^n}$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

$$(-)\begin{cases}S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1\\ S_n-3S_{n-1}=2^n-1\end{cases}$$

$$(S_{n-1}-S_n)-3(S_n-S_{n-1})=2^{n+1}-2^n=2^n$$

ដោយ $S_n-S_{n-1}=a_n$ នោះ $(S_{n+1}-S_n)-3(S_n-S_{n-1})=a_{n+1}-3a_n$

និង $(S_{n+1}-S_n)-3(S_n-S_{n-1})=2^n$ នោះ $a_{n+1}-3a_n=2^n$

$a_{n+1}-3a_n=2^n$ ឬ $a_{n+1}=3a_n+2^n$

តាង $b_n=\frac{a_n}{2^n}$ នោះ $a_n=2^n.b_n\Rightarrow a_{n+1}=3a_n+2^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{1}{2}$ យើងបាន

$$\frac{1}{2^n}.a_{n+1}=\frac{1}{2^n}.3a_n+\frac{1}{2^n}.2^n$$

$$2.\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=3.\frac{a_n}{2^n}+1$$

$$(-)\begin{cases}2b_{n+1}=3b_n+1\\ 2c=3c+1\end{cases}$$ (តាមសមីការសម្គាល់)

$$2(b_{n+1}-c)=3(b_n-c)$$

យើងមាន $2c=3c+1\Rightarrow c=-1$

$$2(b_{n+1}-c)=3(b_n-c)$$
$$2(b_{n+1}+1)=3(b_n+1)$$

$\{b_n+1\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ ស្មើ $b_1+1=\frac{a_1}{2^1}+1=\frac{S_1}{2}+1=\frac{3}{2}$ និងផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ ។

$$b_n+1=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=\frac{3^n-2^n}{2^n}$$

ដោយ $a_n=2^n.b_n$ នោះ $a_n=2^n.\left(\frac{3^n-2^n}{2^n}\right)=3^n-2^n$

ដូចនេះ $a_n=3^n-2^n$

លំហាត់ ២.៤.៣

ឧបមាថាស្វ៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1=1$, $S_n=n^2.a_n$ $\quad(n=1,2,3.......)$

ក.បើ $n\geq 2$ ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង a_{n-1}

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ a_n ។

<u>**ចម្លើយ**</u> ក. បើ $n\geq 2$ ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង a_{n-1}

$$\{a_n\}: a_1=1\ ,\ S_n=n^2.a_n \quad (n=1,2,3.......)$$

$$(-)\begin{cases}S_n=n^2.a_n\\ S_{n-1}=(n-1)^2.a_{n-1}\end{cases}$$

$$S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_n,\quad n\geq 2.$$

ដោយ $S_n-S_{n-1}=a_n$ ហើយ $S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_n$

នោះ $a_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$

$$(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_n$$
$$(n+1)(n-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$$
$$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$$
$$\frac{(n+1)a_n}{a_{n-1}}=(n-1)$$

ដូចនេះ $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

យើងមាន $(n+1)a_n=(n-1)a_n$ នោះ $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$

- ចំពោះ $n\geq 2$ យើងបាន

$$(\times)\begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{\cancel{3}} & , n=2 \\ \dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2}{\cancel{4}} & , n=3 \\ \dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}} & , n=4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n-2}{n} & ,n=n-1 \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1} & ,n=n \end{cases}$$

$$a_n=2a_1\times\frac{1}{n(n+1)}$$

ដោយ $a_1=1$ ដូចនេះ $a_n=\dfrac{2}{(n+1)n}$ ។

- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $a_1=\dfrac{2}{(1+1).1}=1$ ពិត

លំហាត់ ២.៤.៤ ឧបមាថា S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ហើយ $S_n=\dfrac{n}{n-1}.a_n$

ក. បញ្ជាក់រក $a_n(n\ge 3)$ ជាអនុគមន៍នឹង n និង a_{n-1}

ខ. បញ្ជាក់រក $S_n(n\ge 2)$ ជាអនុគមន៍នឹង n និង S_{n-1}

គ. ឧបមាថា $a_1=1$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{S_n\}$ ដែល $n\ge 1$

<u>ចម្លើយ</u> ក. រក $a_n(n\ge 3)$ ជាអនុគមន៍នឹង n និង a_{n-1}

$$\{a_n\}:S_n=\frac{n}{n-1}.a_n\ (n\ge 2)$$

$$(-)\begin{cases} S_n=\dfrac{n}{n-1}a_n \\ S_{n-1}=\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-1} \end{cases}$$

$$S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n-1}a_n-\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$$

ដោយ $S_n-S_{n-1}=a_n$ នោះ $a_n=\dfrac{n}{n-1}.a_n-\dfrac{n-1}{n-2}.a_{n-1}$

$$\frac{n}{n-1}a_n-a_n=\frac{n-1}{n-2}.a_{n-1}$$

$$\frac{n-n+1}{n-1}a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$$

$$\frac{1}{n-1}a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1} \quad (n \ge 3)$

ខ. បញ្ជាក់រក $S_n\,(n\ge 2)$ ជាអនុគមន៍នឹង n និង S_{n-1}

យើងមាន $S_n = \frac{n}{n-1}a$

$$= \frac{n}{n-1}\frac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1}, \quad a_n = \frac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1}$$

$$= n\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$$

$$= nS_{n-1}, \quad S_{n-1} = \frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$$

ដូចនេះ $S_n = nS_{n-1}, \quad n\ge 2$

គ. ឧបមាថា $a_1 = 1$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{S_n\}$ ដែល $n \ge 1$

យើងមាន $S_n = nS_{n-1}$

$$= n(n-1)S_{n-2}$$

$$= n(n-1)(n-2)S_{n-3}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(n-3)]S_2$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(n-3)][n-(n-2)]S_1$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3.2S_1$$

$$= n!S_1$$

ដូចនេះ $S_n = n!\ , S_1 = 1, \ n \ge 2$

សំណួរបន្ថែម ឧបមាជាផលបូក n ដំបូងនៃស្វ៊ីត $a_n : a_1 = 1, s_n = a_{n+1} + n^2 (n\ge 1)$ រកតួទី n ស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ចម្លើយ រកតួទី n ស្វ៊ីត $\{a_n\}$

$$\{a_n\} : a_1 = 1, \quad S_n = a_{n+1} + n^2, \quad n \ge 1$$

- ចំពោះ $n \ge 2$ យើងបាន

$$(-)\begin{cases} S_n = a_{n+1} + n^2 \\ S_{n-1} = a_n + (n-1)^2 \end{cases}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_{n+1} - a_n + n^2 - (n-1)^2$$

ដោយ $S_n - S_{n-1} = a_n$ ហើយ $S_n - S_{n-1} = a_{n+1} + n^2 - a_n - (n-1)^2$

នោះ $a_n = a_{n+1} + n^2 - a_n - (n-1)^2$

$$2a_n = a_{n+1} + n^2 - n^2 + 2n - 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 - 2n$$

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $S_1 = a_2 + 1^2 = (2a_1 - 1) + 1 = 2(1) - 1 + 1 = 2$

ដោយ $S_1 = a_1$ នោះទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = 1 - 2n + 2a_n$ មិនពិតចំពោះ $n = 1$ ទេ។

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 - 2n, \quad n \geq 2$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} a_{n+1} = \frac{1}{2^n} 2a_n + \frac{1-2n}{2^{n+1}} \qquad (i)$$

តាង $b_n = \frac{1}{2^n} a_n$ នោះ $a_n = 2^n b_n$ យើងបាន

តាម (i): $b_{n+1} = b_n + \frac{1-2n}{2^{n+1}}$

- ចំពោះ $n \geq 2$ យើងបាន $b_{n+1} - b_n = \frac{1-2n}{2^{n+1}}$

តាមផលសងស្ទីត $b_n = b_2 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2k-1}{2^{k+1}}$ (ii)

ដោយ $b_n = \frac{1}{2^n} a_n$ នោះ $b_2 = \frac{1}{2^2} a_2 = \frac{1}{2} 2 = 1$

តាង $S_{n-2} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2k-1}{2^{k+1}}$

$$(-)\begin{cases} S_{n-2} = \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \cdots\cdots + \frac{2n-3}{2^2} \\ \frac{1}{2} S_{n-2} = \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^6} + \cdots\cdots + \frac{2n-4}{2^n} + \frac{2n-3}{2^{n+1}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} S_{n-2} = \frac{3}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{2}{2^5} + \frac{2}{2^6} + \cdots\cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-3}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2} S_{n-2} = \frac{1+2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{2}{2^5} + \frac{2}{2^6} + \cdots\cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-3}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^3} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^3} + 2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right) - \frac{2n-3}{2^{n-1}}$$

$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ ជាផលបូកស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយស្មើនឹង $\frac{1}{2^3}$ ហើយផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ ។

$$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$$

$$\frac{1}{2}S_{n-2}=\frac{1}{2^3}+2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)-\frac{2n-3}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2^3}+2\frac{1}{2^2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)-\frac{2n-3}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\frac{2n-3}{2^{n+1}}=\frac{5}{2^3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2n-3}{2^{n+1}}s_{n-2}$$

$$S_{n-2}=\frac{2\times5}{2^3}-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2\times(2n-3)}{2^{n+1}}=\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\frac{2n-3}{2^n}$$

ដោយ $b_n=-S_{n-2}=-\left[\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\frac{2n-3}{2^n}\right]$

$$=-\frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{2n-3}{2^n}$$

$$=-\frac{5}{4}+\frac{2n-3+4}{2^n}=\frac{2n+1}{2^n}-\frac{5}{4}$$

ដោយ $a_n=2^nb_n\Rightarrow a_n=2^n\left(\frac{2n+1}{2^n}-\frac{5}{4}\right)$

$$a_n=2n+1-\frac{5.2^n}{4}=2n+1-5.2^{n-2}$$

ដូចនេះ $a_n=2n+1-5\cdot2^{n-2}$

២.៥. ទំនាក់ទំនងកំណើនក្នុងទម្រង់ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

របៀបដោះស្រាយ

បើទំនាក់ទំនងកំណើន $\{a_n\}$ ដែលមានទម្រង់ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

យើងពិចារណា α និង β ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ នោះយើងបាន

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះគេបំលែងតាមពីររបៀបដូចខាងក្រោម

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ ទំនាក់ទំនងទាំងពីរនេះជាស្វីតធរណីមាត្រ

នៅពេលនេះ α,β ជាឬសនៃសមីការ $x^2+px+q=0$

សមីការ $x^2+px+q=0$ ហៅថាសមីការគ្រឹះនៃ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

ឧទាហរណ៍ ២.៥.១. បើស្វីត $\{a_n\}: a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\ n=1,2,3,...$ ចូររកតួទី n នៃស្វីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ $\{a_n\}:\ a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\quad n=1,2,3,.....$

សមីការសម្គាល់ $x^2-3x-2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=2,\ \ x=1$

តាមសមីការសំគាល់យើងបាន

$\begin{cases} a_{n+2}-2a_n=1(a_{n+1}-2a_n) \\ a_{n+2}-a_n=2(a_{n+1}-a_n) \end{cases}$

$\begin{cases} a_{n+2}-2a_n=(a_{n+1}-2a_n) & \text{(i)} \\ a_{n+2}-a_n=2(a_{n+1}-a_n) & \text{(ii)} \end{cases}$

តាម (i) $a_{n+2}-2a_n=(a_{n+1}-2a_n)$ ជាទំនាក់ទំនងបញ្ជាក់ថា $\{a_{n+1}-2a_n\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ។

ពោលគឺ $a_{n+2}-2a_n=(a_{n+1}-2a_n)=a_{n-1}-2a_{n-2}=a_{n-2}-2a_{n-3}=\ldots=a_2-2a_1=1$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n=1$

តាម (ii) $a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)$ តាង $b_n=a_{n+1}-a_n$

នោះ $\{b_n\}=\{a_{n+1}-a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង2 និងតួទី១ស្មើ $b_1=a_2-a_1=2$

ដូចនេះ $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

ដោយ $b_n=a_{n+1}-a_n$ នោះ $a_{n+1}-a_n=2^n$

$(-)\begin{cases} a_{n+1}-2a_n=1 \\ a_{n+1}-a_n=2^n \end{cases}$

$-a_n=1-2^n$

ដូចនេះ $a_n=2^n-1$

លំហាត់ ២.៥.២. បើស្វ៊ីត $\{a_n\}$: $a_1=1,\ a_2=13,\ a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n,\quad n=1,2,3,\ldots$ ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

<u>ចម្លើយ</u> $\{a_n\}$ $a_1=1,\ a_2=13,\ a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n,\ \ n=1,2,3,..$

$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ សមីការសំគាល់ $x^2=x+6\Rightarrow x^2-x-6=0,\ \ x=3,\ x=-2$

$\begin{cases} a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n) & (i) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n) & \text{(ii)} \end{cases}$

តាម (i) $a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$

នោះយើងបាន $\{a_{n+1}-2a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបស្មើនឹង 3 ហើយតួទីមួយគឺ

$a_2+2a_1=15$

$a_{n+1}+2a_n=15\cdot 3^{n-1}$ (*)

តាម (ii) $a_{n+2}-3_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$

$\{a_{n+1}-3a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម -2 ហើយតួទីមួយគឺ $a_2-3a_1=10$

$a_{n+1}-3a_n=10\cdot(-2)^{n-1}$ (**)

$$(-)\begin{cases} a_{n+1}+2a_n=15\cdot3^{n-1} \\ a_{n+1}-3a_n=10(-2)^{n-1} \end{cases}$$

$$5a_n = 15.3^{n-1} - 10(-2)^{n-1}$$

$$a_n = 3\cdot3^{n-1}-2(-2)^{n-1}$$

ដូចនេះ $a_n = 3^n + (-2)^n$

លំហាត់ ២.៥.២. បើ $\{a_n\}$: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ $(n = 1,2...)$ ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$។

<u>ចម្លើយ</u> $\{a_n\}$: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ $(n = 1,2...)$

$a_{n+2} = 4a_n - 3a_n$ សមីការសម្គាល់ $x^2 = 4x - 3, \Rightarrow x = 1, \; x = 3$

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n) & (*) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=(a_{n-1}-3a_n) & (**) \end{cases}$$

តាម $(*)$, $\{a_{n+1} - a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង3 ហើយតួទី១គឺ $a_2 - a_1 = 3 - 0 = 3$

យើងបាន $a_{n+2} - a_{n+1} = 3\cdot3^{n-1}$

តាម $(**)$, $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ 1 នឹង3 ហើយតួទី១គឺ $a_2 - 3a_1 = 3 - 3.0 = 3$

យើងបាន $a_{n+1} - 3a_n = 3.1^{n-1} = 3$

ដោយ $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ យើងបាន $a_{n+1} - 3a_n = a_2 - 3a_1 = 3 - 3\times0 = 3$

$$(-)\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 3\times(3)^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = 3 \end{cases}$$

$$2a_n = 3\times(3)^{n-1} - 3 \quad \Rightarrow a_n = \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{2}3^n - \frac{3}{2}$

លំហាត់ ២.៥.៣. (ស្វ៊ីត Fibonacci). គេឱ្យស្វ៊ីត $\{a\}_n$ ដែល $a_0 = 0,\; a_1 = 1,\; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\; n = 0,1,2,\cdots$

ចូររកតួទីnនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$។

<u>ចម្លើយ</u> $\{a_n\}$: a_0 ,$a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\quad n = 0,1,2,....$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ សមីការសម្គាល់ $x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0,\; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} a_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}.a_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}.a_n\right) & (i) \\ a_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}.a_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}.a_n\right) & (ii) \end{cases}$$

$\left\{a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\}$ នៃ $(*)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ហើយតួទី១គឺ

$$a_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1 = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\times0 = 1$$

$$a_{n+1}-\frac{1-\sqrt5}{2}a_n=1\times\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \qquad (i)$$

$\left\{a_{n+1}-\frac{1+\sqrt5}{2}a_n\right\}$ នៃ $(**)$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{1-\sqrt5}{2}$ ហើយតួទី១គឺ

$$a_2-\frac{1+\sqrt5}{2}a_1=1-\frac{1+\sqrt5}{2}\times0=1$$

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt5}{2}.a_n=1\times\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \qquad (ii)$$

យក $(i)-(ii)$ យើងបាន

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)a_n=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$\sqrt5a_n=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{\sqrt5}{5}\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{2^n}$$

$$=\frac{\sqrt5}{5.2^n}\left[\left(1+\sqrt5\right)^n-\left(1-\sqrt5\right)^n\right]$$

ដូចនេះ $a_n=\frac{\sqrt5}{5.2^n}\left[\left(1+\sqrt5\right)^n-\left(1-\sqrt5\right)^n\right]$

២.៦ ទំនាក់ទំនងកំណើនបញ្ជាក់ដោយទម្រង់ប្រភាគ

ឧទាហរណ៍បើស្វីត $\{a_n\}:a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+3},\ n=1,2,3,...$

ក. តាង $b_n=\frac{1}{a_n}$ ។រកទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង b_n និង b_{n+1}

ខ. រកតួទីnនៃស្វីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ ក. រកទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង b_n និង b_{n+1}

$$\{a_n\}:a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+3}, \qquad n=1,2,3,\dots$$

តាង $b_n=\frac{1}{a_n}$ នោះ $a_n=\frac{1}{b_n}$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$ នោះ $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_n}+3}=\dfrac{1}{3b_n+1}$

ដូចនេះ: $b_{n+1}=1+3b_n$

ខ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

យើងមាន $b_{n+1}=3b_n+1=\dfrac{2\times 3^{n-1}-1}{2}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\dfrac{1}{3^{n+1}}$ យើងបាន

$$b_{n+1}=3b_n+1$$
$$\frac{1}{3^{n+1}}\times b_{n+1}=3\times\frac{1}{3^{n+1}}\times b_n+\frac{1}{3^{n+1}}$$
$$\frac{1}{3^{n+1}}\times b_{n+1}=\frac{1}{3^n}\times b_n+\frac{1}{3^{n+1}}$$

តាង $c_n=\dfrac{1}{3^n}\times b_n$

នោះ: $c_{n+1}=c_n\times\dfrac{1}{3^{n+1}}$

$$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{3^{n+1}}$$

- ចំពោះ $n>2$ យើងបាន $c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{3^{k+1}}$

ដោយ $c_1=\dfrac{1}{3}b_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^4}+\dots+\dfrac{1}{3^n}\right)$ ជាស៊េរីធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $\dfrac{1}{3^2}$ និងផលធៀបរួម $\dfrac{1}{3}$ យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{3^2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^2}\cdot\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

ដូចនេះ: $c_n=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=\dfrac{1}{6}\left(2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

ដោយ $c_n=\dfrac{1}{3^n}\times b_n$ នោះ: $b_n=3^n c_n$

$$b_n=3^n\times\frac{2\times 3^{n-1}-1}{2\times 3^n}$$

ដោយ $a_n=\frac{1}{b_n}$ នោះ $a_n=\frac{2}{2.3^{n-1}-1}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{2}{2\times 3^{n-1}-1}$

លំហាត់ ២.៦.១. បើស្វ៊ីត $\{a_n\}:a_1=1,a_{n+1}=\frac{6a_n}{3a_n+4},\ n=1,2,3,4,...$ ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ $a_1=1,a_{n+1}=\frac{6a_n}{(3a_n+4)},\quad n=1,2,3,\dots$

តាង $b_n=\frac{1}{a_n}$ យើងបាន $a_{n+1}=\frac{6a_n}{3a_n+4}$

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{6\times\frac{1}{b_n}}{3\times\frac{1}{b_n}+4}=\frac{6\times\frac{1}{b_n}}{\frac{3+4b_n}{b_n}}=\frac{6}{3+4b_n}$$

$$6b_{n+1}=3+4b_n$$

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}\times b_n+\frac{1}{2}$$

$$(-)\begin{cases}b_{n+1}=\frac{2}{3}\times b_n+\frac{1}{2}\\ c=\frac{2}{3}c+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$b_{n+1}-c=\frac{2}{3}(b_n-c)\Rightarrow c=\frac{2}{3}c+\frac{1}{2}\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$ (ប្រើសមីការសម្គាល់)

ដូចនេះ $b_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left(b_n-\frac{3}{2}\right)$

ដោយ $\left\{b_n-\frac{3}{2}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $\frac{2}{3}$ និងតួទី១ស្មើ $b_1-\frac{3}{2}=\frac{1}{a_1}-\frac{3}{2}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

យើងបាន $b_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$b_n=\frac{1}{2}\left[3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\times 3^{n-1}-2^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$$

$$b_n=\frac{3^n-2^{n-1}}{2\times 3^{n-1}}$$

យើងបាន $\frac{1}{a_n}=\frac{3^n-2^{n-1}}{2\times 3^{n-1}}\Rightarrow a_n=\frac{2\times 3^{n-1}}{3^n-2^{n-1}}$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{2\times 3^{n-1}}{3^n-2^{n-1}}$

លំហាត់ ២.៦.២. បើស៊ីត $\{a_n\}: a_1=1, a_n=\dfrac{a_{n-1}}{(2n-1)a_{n-1}+1}, n=1,2,3,\ldots$

ក. ចូររកតួទី n នៃស៊ីត $\{a_n\}$

ខ. រកតម្លៃ $\dfrac{1}{\sqrt{a_1a_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_3a_{n-2}}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_ka_{k-1}}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_na_1}}$

<u>ចម្លើយ</u> ក. ចូររកតួទី n នៃស៊ីត $\{a_n\}$

យើងមាន $\{a_n\}: a_1=1, a_n=\dfrac{a_{n-1}}{(2n-1)a_{n-1}+1}, n=1,2,3,\ldots$

តាង $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ យើងបាន $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\dfrac{1}{b_{n-1}}}{(2n-1)\times\dfrac{1}{b_{n-1}}+1}$

$$=\frac{1}{(2n-1)+b_{n-1}}$$

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{(2n-1)+b_{n-1}}$$

$$b_n=(2n-1)+b_{n-1}$$

$$b_n-b_{n-1}=2n-1$$

$$b_{n+1}-b_n=2n+1$$

- របៀបទី១: ចំពោះ $n\geq 2$ យើងបាន $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1),\quad b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n-1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=n-1+2\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-1$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1+n^2-1=n^2$$

ដោយ $b_n=\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{n^2}$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{1}{n^2}$

- **របៀបទី២**

$$(+)\begin{cases} b_n - b_{n-1} = 2n-1 \\ b_{n-1} - b_{n-2} = 2(n-1)-1 = 2n-3 \\ b_{n-2} - b_{n-3} = 2(n-2)-1 = 2n-5 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_3 - b_2 = 2\times 3 - 1 \\ b_2 - b_1 = 2\times 1 - 1 \end{cases}$$

$$b_n - b_1 = \sum_{k=2}^{n}(2k-1), \quad b_1 = 1$$

$$b_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}(2k-1) = \sum_{k=2}^{n}(2k-1) = n^2$$

ដោយ $a_n = \dfrac{1}{b_n}$ នោះ $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

ខ. រកតម្លៃ $\dfrac{1}{\sqrt{a_1a_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_3a_{n-2}}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{a_ka_{k-1}}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{a_na_1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a_ka_{n-k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a_{n-k+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n-k+1}} = (n-k+1)k$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_ka_{n-k+1}}} = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k(n+1) - \sum_{n=1}^{n}k^2$$

$$= (n+1)\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(3n+3-2n-1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sqrt{a_1a_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_3a_{n-2}}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{a_ka_{k-1}}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{a_na_1}} = \dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

លំហាត់ ២.៦.៣. ស្វ៊ីត $\{a_n\}: a_1 = 4, a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 1} \quad (n = 1,2,3,\dots)$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n \neq 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1,2,3,\dots$

ខ. តាង $b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

គ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចម្លើយ ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n \neq 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1,2,3,\dots$

ឧបមាថា $m \in IN$ ដែល $a_m = 2$

យើងបាន $a_m = \dfrac{3a_{m-1}-4}{a_{m-1}-1}$

$$2 = \frac{3a_{m-1}-4}{a_{m-1}-1}$$

$$2(a_{m-1}-1) = 3a_{m-1}-4$$

$$2a_{m-1}-2 = 3a_{m-1}-4$$

$$a_{m-1} = 2$$

$$a_m = a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_1 = 2$$

ដោយ $a_1 = 4$ នោះ $a_1 = 2$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ដូចនេះ $\forall n = 1,2,3,\ldots\ \ a_n \neq 2$

ខ. តាង $b_n = \dfrac{1}{a_n-2}$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

$$\{a_n\}: a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{3a_n-4}{a_n-1} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

តាង $\quad b_n = \dfrac{1}{a_n-2} \qquad (a_n \neq 2)$

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{3a_n-4}{a_n-1}-2} = \frac{a_n-1}{a_n-2} = \frac{a_n-2+1}{a_n-2}$$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n-2} = 1 + b_n$$

$$b_{n+1} - b_n = 1$$

ដូចនេះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួមស្មើនឹង1 និងតួទី១គឺ $b_1 = \dfrac{1}{a_1-2} = \dfrac{1}{2}$

$$b_n = b_1 + 1.(n-1) = \frac{1}{2} + n - 1$$

$$= n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2n-1)$$

ដូចនេះ $b_n = \dfrac{1}{2}(2n-1)$

គ. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

យើងមាន $b_n = \dfrac{1}{2}(2n-1)$

ដោយ $b_n = \dfrac{1}{a_n-2}$ នោះ $\dfrac{1}{a_n-2} = \dfrac{1}{2}(2n-1)$

$$\frac{2}{2n-1} = a_n - 2$$

$$a_n = \frac{2}{2n-1} + 2$$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{4n}{2n-1}$

២.៧.អនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ពិនិត្យមើលស៊ីត $\{a_n\}$ ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង $a_1=1, a_{n+1}=2(a_n+1),\ n=1,2,3,...$

$a_2=2(a_1+1)=2(2+1)=2^2+2$

$a_3=2(a_2+1)=2(2^2+2+1)=2^3+2^2+2$

$a_4=2(a_3+1)=2(2^3+2^2+2+1)=2^4+2^3+2^2+2$

$a_5=2(a_4+1)=2(2^4+2^3+2^2+2+1)=2^5+2^4+2^3+2^2+2$

សន្និដ្ឋាន $a_n=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+...+2$

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ការសន្និដ្ឋាននេះ(inference)យើងអាចប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា។

និយមន័យ: សំណើ $P(n)$ ពិតគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បើសំណើខាងក្រោម (i) និង (ii) ពិត

(i) $P(n)$ ពិត

(ii) បើ $P(k)$ ពិតនោះ $P(k+1)$ ពិតគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

វិធីស្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្អែកលើគោលការណ៍នេះ គេហៅថា **អនុមានរួមគណិតវិទ្យា**។

ឧទាហរណ៍២.៧.១. ក. តើការសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកពិតឬទេ ចំពោះ $n=1$?

ខ. ឧបមាថាការសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកពិតចំពោះ $n=k$ ។ តើវាពិតចំពោះ $n=k+1$ ឬទេ ?

<u>**ចម្លើយ**</u> ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា យើងបាន

$P(1)$ ពិត $\Rightarrow P(2)$ ពិត $\Rightarrow P(3)$ ពិត $\Rightarrow P(k)$ ស្មើតពិត $\Rightarrow P(k+1)$ ពិត $\Rightarrow ...$ នោះ $P(n)$ ពិតចំពោះ n ។ដូចដែលឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះលំនាំខាងក្រោមមានសារៈសំខាន់ណាស់ក្នុងគណិតវិទ្យា។ អនុមានរួមគណិតវិទ្យាមានសារៈសំខាន់ដើម្បីសម្រាយបញ្ជាក់**សមីការនិងវិសមភាពដែលពិបាកៗ** ដើម្បីធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់។

សាកល្បង → សន្និដ្ឋាន → ស្រាយបញ្ជាក់

ឧទាហរណ៍២.៧.២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$ ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា។<u>**សម្រាយបញ្ជាក់**</u>

- ចំពោះ $n=1$ អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ $=1$

អង្គខាងស្តាំនៃសមីការ $=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=1$

យើងបាន អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ ស្មើ អង្គខាងស្តាំនៃសមីការ។

ដូចនេះសមីការនេះពិតចំពោះ $n=1$ ។

- ឧបមាថា សមីការនេះពិត ចំពោះ $n=k$ នោះ $1^3+2^3+3^3+...+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2,\quad k\geq 1$ ។
- បើបូកអង្គទាំងពីរនឹង $(k+1)^3$ យើងបាន

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(1+k)^3$$
$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(1+k)^3$$
$$=\frac{(k+1)^2}{4}\left[k^2+4(k+1)\right]$$
$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$
$$=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា សមីការនេះពិតគ្រប់តម្លៃ $n\geq 1$។

លំហាត់ ២.៧.១. សម្រាយបញ្ជាក់សមីការខាងក្រោមតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា។

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),\quad n=1,2,3,\ldots$$

<u>តម្រុយ</u> សរសេរសមីការនេះរាងដូចម្ដេចនៅពេល $n=k+1$

<u>ស្រាយបញ្ជាក់</u>

- ចំពោះ $n=1$, អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ $1\cdot 2=2$

អង្គខាងស្ដាំនៃសមីការ $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2)=2$

យើងបាន អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ ស្មើ អង្គខាងស្ដាំនៃសមីការ។

ដូចនេះសមីការនេះពិតចំពោះ $n=1$។

- ឧបមាថាសមីការនេះពិតចំពោះ $n=k$ នោះ

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2),\quad k\geq 1$$ ។

- គណនា $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$$ ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា សមីការនេះពិតគ្រប់តម្លៃ $n\geq 1$។

លំហាត់ ២.៧.២. ពិនិត្យមើលតម្លៃ n^2 និង 4^{n-2} ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិវិជ្ជមាន n ។ តើមួយណាធំជាងមួយណា ?

ជំហានទី១: បំពេញចន្លោះនៃតារាងខាងក្រោមហើយប្រៀបធៀបតម្លៃនោះចំពោះ $n\geq 5$។

n	1	2	3	4	5	6	7
n^2	1	4	9	16	25	36	49
4^{n-2}	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64	256	1024

ជំហានទី២: សន្និដ្ឋានថាតើមួយណាធំជាងមួយណានៅពេលណាដែល n ជាចំនួនធំមួយ។

4^{n-2} ធំជាងពេលដែល n ជាចំនួនធំ

ជំហានទី៣: ស្រាយបញ្ជាក់ $4^{n-2} > n^2$ គ្រប់ $n \ge 5$

- ចំពោះ $n = 5 \Rightarrow 4^3 > 25$ (ពិត)
- ឧបមាថា វិសមីការនេះពិតដល់ $n = k$ នោះ $4^{k-2} > k^2$
- គណនា $4^{k-1} = 4^{k-2+1} = 4.4^{k-2} > 4k^2$

តែ $4k^2 - (k+1)^2 = (2k-k-1)(2k+k+1) = (k-1)(3k+1) > 0, \ \forall k \ge 5$

យើងបាន $4k^2 > (k+1)^2$

ដូចនេះ $4^{k-1} = 4^{k-2+1} = 4.4^{k-2} > 4k^2 > (k+1)^2$, ពិតចំពោះ $n = k+1, \ \forall k \ge 5$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា វិសមីការខាងលើនេះពិតគ្រប់តម្លៃ $n \ge 5$ ។

លំហាត់ ២.៧.៣. តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា $n^3 + 2n$ គឺជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- បើ $n = 1$ នោះ $1^3 + 2\cdot 1 = 3$ ជាពហុគុណនៃ 3
- បើ $n = 2$ នោះ $2^3 + 2\cdot 2 = 12$ ជាពហុគុណនៃ 3
- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ នោះ $k^3 + 2k$ ជាពហុគុណនៃ 3

តាង $k^3 + 2k = 3N$ ជាពហុគុណនៃ 3, $N = 1, 2, 3, \ldots$ យើងបាន

- គណនា $(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$$= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3$$
$$= 3N + 3(k^2 + k + 1)$$

ដោយ $3N$ ជាពហុគុណនៃ 3 ហើយ $3(k^2 + k + 1)$ ជាពហុគុណនៃ 3 នោះ $(k+1)^3 + 2(k+1)$ ក៏ជាពហុគុណនៃ 3

ដូចនេះ កន្សោមនេះពិតរហូតដល់ $n = k+1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ពិតគ្រប់តម្លៃ n ។

លំហាត់បន្ថែម:

1) សម្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោមដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

2) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n \in IN$

3) ស្រាយបញ្ជាក់ $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n \in IN$

4) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n \in IN$

5) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n \in IN$

ស្រាយបញ្ជាក់ 1) ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមភាពខាងក្រោមដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

- បើ $n=1$ អង្គខាងឆ្វេង $1\cdot2\cdot3=6$ និងអង្គខាងស្តាំ $\frac{1}{4}(1+1)(1+2)(1+3)=6$

ដូចនេះ សមភាពនេះពិតចំពោះ $n=1$ ។

- ឧបមាថាសមភាពនេះពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

- គណនា $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)$

$$=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=(k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$ ពិតចំពោះ $n=k+1,\quad k\geq1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ ពិតគ្រប់តម្លៃ $n\geq1$ ។

2)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n\in IN$

- បើ $n=1$ $2^{1+1}+3^{2\cdot1-1}=7$ ជាពហុគុណនៃ 7
- បើ $n=1,$ $2^{2+1}+3^{2\cdot2-1}=35$ ជាពហុគុណនៃ 7
- ឧបមាពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ ជាពហុ $2^{k+1}+3^{2k-1}$ គុណនៃ 7 $\forall k\geq1$ ។
- តាង $2^{k+1}+3^{2k+1}=7p$ $\qquad(p\in IN)$

យើងបាន $2^{k+1}+3^{2k-1}=7p$

$$2^{k+1+1}+3^2\cdot3^{2k-1}=2\cdot2^{k+1}+3^2\cdot3^{2k-1}$$

$$=2\cdot2^{k+1}+2\cdot3^{2k-1}+7\cdot3^{2k-1}$$

$$=2\cdot7p+7\cdot3^{2k-1}$$

$$=7\left(2\cdot p+3^{2k-1}\right)$$ ជាពហុគុណនៃ 7 ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 គ្រប់តម្លៃ $n\geq1$ ។

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ចំពោះ $n\in IN$

- បើ $n=1,$ $1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=9\cdot4$ ជាពហុគុណនៃ 9 ពិត
- បើ $n=2,$ $2^3+(2+1)^3+(2+2)^3=9\cdot11$ ជាពហុគុណនៃ 9 ពិត
- ឧបមាពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ ជាពហុជាគុណនៃ 9, $\forall k\geq1$ ។
- យើងតាង $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9a$ យើងបាន

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$

$$=(k+1)^3+(k+1)^3+3(k+1)^3+3(k+1)+1+(k+1)^3+2(k+1)^2+4(k+1)+2^3$$

$$=3(k+1)^3+5(k+1)^2+7(k+1)+9$$

$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+9\cdot 3k+27$$

$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+9\cdot 3k+27$$

$=9a+9\left(k^2+3k+3\right)$ ជាពហុគុណនៃ 9 ពិតចំពោះ $n=k+1$។

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 គ្រប់តម្លៃ $n\geq 1$។

4) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n\in IN$

- បើ $n+1,\ \ 1\cdot 1!=1$ អង្គខាងឆ្វេង និង $(1+1)!-1=1$ អង្គខាងស្តាំ ពិត
- ឧបមាពិតដល់ $n=k$ ពេលគឺ $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+k\cdot k!=(k+1)!-1,\quad \forall k\geq 1$
- គណនា $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!$

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!$$

$$=(k+1)!(k+1+1)-1$$

$$=(k+1)!(k+2)-1$$

$=(k+2)!-1$ ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$ គ្រប់តម្លៃ $n\geq 1$។

5) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}\quad (n=1,2,3,...)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n\in IN$

- បើ $n=1,\ \ \frac{1}{2}$ អង្គខាងឆ្វេង និង $2-\frac{1+2}{2^1}=\frac{1}{2}$ អង្គខាងស្តាំ ពិត
- ឧបមាពិតដល់ $n=k$ ពេលគឺ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k},\quad \forall k\geq 1$
- គណនា $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$

$$=2-\frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}}$$

$=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n},\quad n=1,2,3,...$

២.៨.ទំនាក់ទំនងកំណើន និងអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ឧទាហរណ៍ ២.៨.១. ស្វ៊ីត $\{a_n\}: a_1=a(a>0),\ a_n=\frac{2a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\quad (n=2,3,4,...)$

1) រក a_2,a_3,a_4 ដោយប្រើ a

2) ដោយផ្អែកលើ 1) រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

3) ស្រាយថាការសន្និដ្ឋានក្នុងសំណួរទី2) ពិត

ចម្លើយ ចំណោទខាងលើនេះអាចដោះស្រាយតាមលំនាំខាងក្រោម៖

សាកល្បង → សន្និដ្ឋាន → សម្រាយបញ្ជាក់

1) $a_2=\dfrac{2a_1}{1+a_1}=\dfrac{2a}{1+a}$

$$a_3=\frac{2a_2}{1+a_2}=\frac{2\times\frac{2a}{1+a}}{1+\frac{2a}{1+a}}=\frac{\frac{4a}{1+a}}{\frac{1+3a}{1+a}}=\frac{4a}{1+3a}$$

$$a_4=\frac{2a_3}{1+a_3}=\frac{2\times\frac{4a}{1+3a}}{1+\frac{4a}{1+3a}}=\frac{8a}{1+7a}$$

$$a_5=\frac{2a_4}{1+a_4}=\frac{2\times\frac{8a}{1+7a}}{1+\frac{8a}{1+7a}}=\frac{16a}{1+17a}$$

2) មេគុណក្នុងភាគយក a_2,a_3,a_4,a_5 គឺ $2,4,8$ និង 16។ លេខនេះអាចបញ្ជាក់បានថា $2^{n-1}-1$។

មេគុណ a នៅក្នុងភាគបែងគឺ $1,3,7$ និង 15។ លេខនេះអាចបញ្ជាក់បានថា $2^{n-1}-1$។

ដូចនេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា $a_n=\dfrac{2^{n-1}a}{1+\left(2^{n-1}-1\right)a}\qquad (A)$

3) ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ (A) តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

- បើ $n=1\quad a_1=\dfrac{2^0a}{1+\left(2^0-1\right)a}=a$ ពិត
- ឧបមា (A) ពិតនៅពេល $n=k$ នោះ $a_k=\dfrac{2^{k-1}}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}$
- តាមទំនាក់ **ទំនងកំណើន** $a_{k+1}=\dfrac{2a_k}{1+a_k}=\dfrac{2\dfrac{2^{k-1}a}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}}{1+\dfrac{2^{k-1}}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}}$

$$=\frac{2^ka}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a+2^{k-1}a}$$

$$=\frac{\dfrac{2^ka}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}}{\dfrac{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}}$$

$$=\frac{2^ka}{1+\left(2^{k-1}-1\right)a}$$ ពិតចំពោះ $n=k+1,\quad \forall k\geq 1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា សមីការ (A) ពិតចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

រូបមន្តកំណើន $\Rightarrow$ **តួទីនៃ n ស្វ៊ីត** $\{a_n\}$

$$a_1 = a(a>0), a_n = \frac{2a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \quad (n=1,2,3,...)$$

បើយើងតាង $b_n = \frac{1}{a_n}$ នោះ $\frac{1}{b_n} = \frac{\frac{2}{b_{n-1}}}{1+\frac{1}{b_{n-1}}} = \frac{2}{b_n+1} \quad (n=1,2,3,...)$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_n - 1 = \frac{1}{2}(b_{n-1}-1), b_1 - 1 = \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1-a}{a}$$

ដូចនេះ $\{b_n - 1\}$ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ ស្មើ $\frac{1-a}{a}$ និងផលធៀបរួម $\frac{1}{2}$ ។

ករណីនេះ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1 = a$ ។

លំហាត់ ២.៨.១. ស្វ៊ីត $\{a_n\}: a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n=1,2,3,...)$

1)គណនា a_2, a_2, a_3

2)ផ្អែកលើសំណួរទី1) សន្និដ្ឋានរកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថាការសន្និដ្ឋាននៅក្នុងសំណួរទី2) ពិត

<u>ចម្លើយ</u> 1)គណនា a_2, a_2, a_3

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n=1,2,3,...)$$

$$a_2 = \frac{1}{2-a_1} = \frac{1}{2-\frac{1}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$a_3 = \frac{1}{2-a_2} = \frac{1}{2-\frac{4}{7}} = \frac{7}{10}$$

$$a_4 = \frac{1}{2-a_3} = \frac{1}{2-\frac{7}{10}} = \frac{10}{13}$$

2)ផ្អែកលើសំណួរទី1) សន្និដ្ឋានរកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ភាគយកនៃ a_1, a_2, a_3, a_4 គឺ $1, 4, 7, 10$ ដែលអាចឱ្យយើងបញ្ជាក់ថា $3n-2$

ភាគបែង a_1, a_2, a_3, a_4 គឺ $1, 4, 7, 13$ ដែលអាចឱ្យយើងទាញបានថា $3n+1$

ដូចនេះ យើងអាចបញ្ជាក់បានថា $a_n = \frac{3n-2}{3n+1}$

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \frac{3n-2}{3n+1}$ ពិត

- បើ $n=1$ $a_1 = \frac{3\cdot1-2}{3\cdot2+1} = \frac{1}{4}$ នោះ $n=1$ ពិត
- ឧបមា $n=k$ ពិតពេលគឺ $a_n = \frac{3k-2}{3k+1}$ ពិត

- យើងមាន $a_k=\dfrac{1}{2-a_k}$ នោះ $a_{k+1}=\dfrac{1}{2-\dfrac{3k-2}{3k+1}}$

$$=\frac{3k+1}{6k+2-3k+2}$$

$$=\frac{3k+1}{3k+4}$$ ពិតចំពោះ $n=k+1,\quad \forall k\geq 1$

ដូចនេះតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $a_n=\dfrac{3n-2}{3n+1}$ ពិតគ្រប់តម្លៃ $\forall n\geq 1$ ។

លំហាត់ ២.៨.២. ស្វ៊ីត $\{a_n\}:a_1=\dfrac{1}{2}\ ,a_{n+1}=\dfrac{n+1}{(n+1)a_n+2}\quad (n=1,2,3,...)$

1)គណនា a_2,a_2,a_3

2)ផ្អែកលើសំណួរទី(1) សន្និដ្ឋានរកតួទី n នៃស្វ៊ីត

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថា ការសន្និដ្ឋានក្នុងសំណួរទី2)ពិត

<u>ចម្លើយ</u> 1)គណនា a_2,a_2,a_3

$$a_1=\frac{1}{2}$$

$$a_2=\frac{1+1}{(1+1)a_1+2}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

$$a_3=\frac{2+1}{(2+1)a_2+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

$$a_4=\frac{3+1}{(3+1)a_2+2}=\frac{4}{3+2}=\frac{4}{5}$$

2)ផ្អែកសំណួរទី1) សន្និដ្ឋានរកតួទី n នៃស្វ៊ីត

ភាគយកនៃ a_1,a_2,a_3,a_4 គឺ $1,2,3,4$ ដែលអាចឱ្យយើងបញ្ជាក់ថា n

ភាគបែងនៃ a_1,a_2,a_3,a_4 គឺ $2,3,4,5$ ដែលអាចឱ្យយើងទាញបានថា $n+1$

ដូចនេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ ពិត

- បើ $n=1\quad a_1=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ ពិត
- ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ នោះ $a_k=\dfrac{k}{k+1},\quad \forall k\geq 1$
- យើងមាន $a_{k+1}=\dfrac{k+1}{(k+1)a_k+2}$

$$=\frac{k+1}{(k+1)\times\dfrac{k}{k+1}+2}=\frac{k+1}{k+2}$$ ពិតចំពោះ $n=k+1,\quad \forall k\geq 1$

ដូចនេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ ពិត $\forall k\geq 1$។

ឧទាហរណ៍ ២.៨.២. ឧបមាថាស៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

(i) $a_n > 0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

(ii) $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$

1)ដូចនេះគណនា a_1, a_2 និង a_3

2)តាមសំណួរទី1) សន្និដ្ឋានរកតួទីនៃ $\{a_n\}$

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថា ការសន្និដ្ឋាននៅក្នុងសំណួរទី2)ពិត

ចម្លើយ $a_1^2 = a_1^3 \Rightarrow a_1 = 1, \quad a_1 > 0$ នោះ $(1 + a_2)^2 = 1^3 + a_2^3$

ដូចនេះ $a_2^3 - a_2^2 = 0 \Rightarrow a_2(a_2 + 1)(a_2 - 2) = 0$

ដោយ $a_2 > 0, a_2 > 2, \ (1 + 2 + a_3)^2 = 1^3 + 2^3 + a_3^3$

ដូចនេះ $a_3^3 - a_3^2 - 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3(a_3 + 2)(a_3 - 2) = 0$

ដោយ $a_3 > 0 \Rightarrow a_3 = 3$

2)តាមសំណួរទី1) យើងអាចសន្និដ្ឋានថា $a_n = n \qquad (A)$

3) (a) $a_1 = 1$ តាម1) នោះ (A) ពិតចំពោះ $n = 1$

(b) ឧបមាថា $a_n = n$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $n \le k$ នោះ

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + a_{k+1})^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + a_{k+1}^3$$

$$\Rightarrow \qquad \left\{\frac{1}{2}k(k+1) + a_{k+1}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + a_{k+1}^3$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + k(k+1)a_{k+1} + a_{k+1}^2 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + a_{k+1}^3$$

$$a_{k+1}^3 - a_{k+1}^2 - k(k+1)a_{k+1} = 0$$

$$a_{k+1}\left\{a_{k+1}^2 - a_{k+1}k(k+1)\right\} = 0$$

$$a_{k+1}(a_{k+1} + k)\left\{a_{k+1} - (k+1)\right\} = 0$$

ដោយ $a_{k+1} > 0 \Rightarrow a_{k+1} = k + 1$

ដូចនេះ (A) ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

- យើងមិនអាចឧបមាថា (a) នៅពេល $n = k$ ទេព្រោះនោះគ្រាន់តែឧបមាថា $a_k = k$

ហើយយើងមិនឧបមាថា $a_{k+1} = k - 1, a_{k-2} = k - 2, \ldots$ នោះយើងមិនអាចពិចារណាថា

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + k + a_{k+1})^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + a_{k+1}^3$$ ទេ។

លំហាត់ ២.៨.៣. ឧបមាថាស៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

1)គណនា a_2, a_3, a_4

2)តាមសំណួរទី1) សន្និដ្ឋានរកតួទី នៃស៊ីត $\{a_n\}$

3)ស្រាយបញ្ជាក់ថាការសន្និដ្ឋានខាងលើពិត

ចម្លើយ 1)គណនា a_2, a_3, a_4

- $a_1 = 1, \Rightarrow 1 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 \cdot a_1 \Rightarrow a_2 = 2$

$\Rightarrow\ a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1)$

$2a_3=2a_1a_2+a_2a_1$

$\Rightarrow\ a_3=3$

$\Rightarrow a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=2(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1)$

$\Rightarrow\ \ 2+6+3a_4=2(3+4+3)$

$\Rightarrow\ a_4=4$

2)តាមសំណួរទី1)យើងទាញរកតួទីនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ $a_n=n\quad (A)$

3)ស្រាយថា $a_n=n$ ពិត

- $a_1=1$ តាម1)នោះ (A) ពិតចំពោះ $n=1$
- ឧបមាពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ $a_k=k,\ \ k=1,2,3,....$ ពិត
- តាមសំណួរ2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+(k-1)k+ka_{k+1}=2\left[1\cdot k+2(k-1)+3(k-2)+...+k\cdot 1\right]$

$$ka_{k+1}+\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)=2\sum_{i=1}^{k}i(k-i+1)$$

$$ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k}i(k-i+1)-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)$$

$$=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1)-2\sum_{i=1}^{k}i^2-\sum_{i=1}^{k-1}i^2-\sum_{i=1}^{k-1}i$$

$$=2(k+1)\times\frac{1}{2}k(k+1)-2\times\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-\frac{1}{6}(k-1)k\cdot 2k-\frac{1}{2}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(2k^2+3k+3)+\frac{1}{2}k(2k^2+k+1)$$

$$ka_{k+1}=k(k+1)$$

$\Rightarrow a_{k+1}=k+1$ ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ $a_n=n,\quad n=1,2,3,...$

២.៩ សម្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

ឧទាហរណ៍ ២.៩.១. បើ $h>0$ $n=2,3,4,...$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាវិសមភាពតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

$(1+h)^n>1+n$ ។

<u>ចម្លើយ</u> • $n=2,\ (1+h)^2=1+2h+h^2>1+h^2$ ពិត

- ឧបមាថាពិតដល់ $n=k(n\geq 2)$ នោះ $(1+h)^k>1+kh$
- បើយើងគុណអង្គទាំងពីរនឹង $1+h$

$$(1+h)^k(1+h)>(1+kh)(1+h)$$

$$(1+h)^{k+1}>1+kh+h+kh^2=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$$ ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ វិសមភាពនេះពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលធំជាង ឬស្មើ 2 ។

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្សេងទៀត

$$(1+h)^k = 1 + {}_kC_1h + {}_kC_2h^2 + {}_kC_3h^3 + \dots\dots + h^n$$
$$> 1 + {}_kC_1h = 1 + kh$$

ដូចនេះ $(1+h)^n > 1 + nh$

ឧទាហរណ៍ ២.៩.២. ឧបមាថា n គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងឬស្មើ 4 ។ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $2^n > 3n$

របៀបដោះស្រាយៈ វិសមភាព ⇨ ពិចារណាពខុសគ្នា

<u>ចម្លើយ</u> $n=4$, អង្គខាងឆ្វេង $= 2^4 = 16$ និងអង្គខាងស្តាំ $= 3\times 4 = 12$

ដូចនេះ វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n=4$

- ឧបមាថាវិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n = k \geq 4$ នោះ $2^k > 3k \quad (A)$
- នៅពេល $n = k+1$ ពិចារណាភាពខុសគ្នារវាងអង្គខាងឆ្វេង និងអង្គខាងស្តាំ

$$2^{k+1} - 3(k+1) = 2\cdot 2^k - 3k - 3$$
$$> 2\cdot 3k - 3k - 3$$
$$= 3k - 3 > 0, \quad k \geq 4$$

ដូចនេះ $2^{k+1} > 3(k+1)$, វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n = k+1$

ដូចនេះ វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n \geq 4$ ។

លំហាត់ ២.៩.១. ឧបមាថា $n \geq 2$ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោមៈ

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

<u>ចម្លើយ</u> យើងមាន $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$$(+)\begin{cases} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots. + \frac{1}{n^2} < 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots. + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

លំហាត់ ២.៩.២. ឧបមាថា $a>0, b>0$ និង $n \in IN$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$ ។

ចម្លើយ ឧបមាថា $a>0, b>0$ និង $n\in IN$ ស្រាយថា $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$

- $n=1,\ \frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពខាងលើពិតចំពោះ $n=1$

- ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a^k+b^k}{2}$

- យើងមាន $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a^k+b^k}{2}$

$$\frac{a+b}{2}\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a^k+b^k}{2}\times\frac{a+b}{2}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+ba^k}{4}$$

$$\le \frac{2\left(a^{k+1}+b^{k+1}\right)-a^{k+1}-b^{k+1}+ba^k+ab^k}{4}$$

$$\le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}+\frac{a^k(b-a)+b^k(a-b)}{4}$$

$$\le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{(a-b)\left(a^k-b^k\right)}{4}$$

ដោយ (i) $a=b\Rightarrow \frac{\left(a^k-b^k\right)(a-b)}{4}=0$

(ii) $a>b\Rightarrow a^k>b^k\ ,\ a^k-b^k>0\Rightarrow \frac{(a-b)\left(a^k-b^k\right)}{4}>0$

(iii) $a<b\Rightarrow a^k<b^k\ ,\ a^k-b^k<0\Rightarrow \frac{(a-b)\left(a^k-b^k\right)}{4}>0$

ដូចនេះ វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$

លំហាត់ ២.៩.៣. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+....+n)\ge n^2$ ។

ចម្លើយ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+....+n)\ge n^2$

- **របៀបទី១**

- $n=1,\ 1=1$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n=1$ ។

- ឧបមាថាវិសមភាពនេះពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+....+k)\ge k^2$

- យើងមាន $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+2+3+....+k+(k+1)\right)$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\times\left(\frac{1}{2}k\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}\right)\times\frac{1}{2}k\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}k+1$$

ដោយ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{2}k\left(k+1\right)\geq k^2$ និង $\left(k+1\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}\right)>\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(k+1\right)\ \left(k\geq 2\right)$

យើងមាន $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}\right)\times\frac{1}{2}k\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}k+1$

$$\geq k^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(k+1\right)+\frac{1}{2}k+1$$

$$\geq k^2+\frac{3}{2}\left(k+1\right)+\frac{1}{2}k+1$$

$$\geq k^2+2k+1+\frac{3}{2}$$

$$\geq\left(k+1\right)^2+\frac{3}{2}$$

$$\geq(k+1)^2$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+....+n)\geq n^2$ (ពិត) ។

- **របៀបទី២** $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{2}n\left(n+1\right)\geq n^2$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)\geq\frac{2n}{n+1}\qquad(A)$$

- $n=1$, អង្គខាងឆ្វេងនៃ $(A)=1$ និង អង្គខាងស្តាំនៃ $(A)=\frac{2\cdot 1}{1+1}=1$

ដូចនេះ វិសមភាព (A) ពិតចំពោះ $n=1$

- ឧបមាថាវិសមភាព (A) ពិតចំពោះ $n=k$ ពោលគឺ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}\right)\geq\frac{2k}{k+1}$
- គណនា $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\geq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}(2k+1)$

$$\geq\frac{(2k+1)}{k+1}\frac{k+2}{k+2}=\frac{2k^2+4k+2+k}{(k+1)(k+2)}$$

$$\geq\frac{2(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\geq\frac{2(k+1)}{k+2}$$

ដូចនេះ វិសមភាព(A)ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\frac{2n}{n+1}$ (ពិត)

ដូចនេះ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots n)\geq n^2$ (ពិត)

លំហាត់ ២.៩.៤. $\{x_n\}$ $x_1=1$, $8x_{n+1}=12+x_n^2$ $(n=1,2,3,...)$ ស្ទីតស្រាយវិសមភាព$1\leq x_n<x_{n+1}<2$ ។

<u>ចម្លើយ</u> $x_1=1,\ 8x_{n+1}=12+x_n^2,\quad n=1,2,3,....$

- ស្រាយវិសមភាព$1\leq x_n<2$ យើងមាន $x_1=1$

  $8x_2=12+x_1^2=12+1=13$

  $1<x_2<2$

ដូចនេះ វិសមភាពខាងលើពិតចំពោះ $n=2$

- ឧបមាថាវិសមភាពនេះពិតដល់$n=k$ ពោលគឺ $1\leq x_k<2$
- យើងមាន$1<x_k<2$

  $1+12<x_k^2+12<4+12$

  $13<8x_{k+1}<16$

  $1<x_{k+1}<2$ ពិត

ដូចនេះ $1<x_n<2$ (A)

- ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព$1\leq x_{n+1}<2$យើងមាន

  $1<x_n<2$

  $1<x_n^2<4$

  $1+12<x_n^2+12<4+12$

  $13<8x_{n+1}<16$

  $1<x_{n+1}<2$

ដូចនេះ $1<x_{n+1}<2$ (ពិត) (B)

- ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $x_n<x_{n+1}$

  យើងមាន $x_1=1,\ x_2=\frac{13}{8}>1$

ដូចនេះ $n=1$ ពិត ពោលគឺ $x_2>x_1$

- ឧបមាថាវិសមភាពនេះពិតដល់ $n=k$ ពោលគឺ $x_{n+1}>x_n$
- យើងនឹងស្រាយឱ្យវិសមភាពនេះពិតដល់ $n=k+1$ពោលគឺ$x_{k+1}>x_k$ យើងមាន

  $x_{k+1}>x_k$

  $x_{k+1}^2>x_k^2$

  $x_{k+1}^2+12>x_k^2+12$

$x_{k+2}>x_{k+1}$ (ពិត)

ដូចនេះ $x_n<x_{n+1}$ (C)

តាម $(A),(B)$ និង (C) យើងបាន

$1 \le x_n < x_{n+1} < 2$

លំហាត់ ២.៩.៥ (Newton's Method)

ស្វ៊ីត $\{a_n\}:\ a_1 = 2\ , a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$

1) ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$

2) ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right)^2 \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$

3) ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left|a_5 - \sqrt{2}\right| < 10^{-10}$ (អាចប្រើ $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$)

<u>ចម្លើយ</u> 1)ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$

- ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $a_{n+1} \ge \sqrt{2}$

យើងមាន

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) = \frac{3}{2} > 0$

- ឧបមា $n = k$ ពិត ពោលគឺ $a_k > 0$

យើងនឹងស្រាយឱ្យពិតដល់ $n = k+1$ ពោលគឺ $a_{k+1} > 0$ យើងមាន

$a_k > 0$

$a_k + \frac{2}{a_k} > 0$

$a_{k+1} > 0$ (ពិត)

ដូចនេះ $a_n > 0 \ \ (n = 1,2,3,\ldots)$

$$a_n > 0: \qquad a_n + \frac{2}{a_n} \ge 2\sqrt{a_n \times \frac{2}{a_n}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \ge \sqrt{2}$$

$$a_{n+1} \ge \sqrt{2} \quad (\text{ពិត})$$

ដូចនេះ $a_{n+1} > \sqrt{2} \qquad (A)$

- ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $a_n > \sqrt{2}$

យើងមាន $a_1 = 2 > \sqrt{2}$

ដូចនេះ វិសមភាពខាងលើពិតចំពោះ $n = 1$

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ ពោលគឺ $a_k > \sqrt{2}$
- បើ $a_{k+1} > \sqrt{2} \Rightarrow a_{k+1} - \sqrt{2} > 0$

$$\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{2}{a_k}\right)-\sqrt{2}>0$$

$$\frac{a_k^2-2\sqrt{2}a_k+2}{2a_k}>0$$

$$\frac{\left(a_k-\sqrt{2}\right)^2}{2a_k}>0 \quad (\text{ពិត})$$

ដូចនេះ $a_n>\sqrt{2} \qquad (B)$

- យើងនឹងស្រាយឱ្យ $a_n-a_{n+1}>0$ យើងមាន

$$a_n-a_{n+1}$$
$$=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{a_n}$$
$$=\frac{a_n^2-2}{2a_n}$$
$$=\frac{\left(a_n-\sqrt{2}\right)\left(a_n+\sqrt{2}\right)}{2a_n}$$
$$\therefore a_n-a_{n+1}>0 \qquad (C)$$

តាម $(A),(B),(C)$ យើងបាន $\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n$

1) ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $a_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{2}\right)^2$ យើងមាន

$$a_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)-\sqrt{2}$$
$$=\frac{\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2}{2a_n}$$
$$<\frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2$$

ដូចនេះ $a_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$

3) ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $a_5-\sqrt{2}=10^{-10}$ យើងមាន

$$\left|a_5-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{128}\left(a_2-\sqrt{2}\right)^8$$
$$=\frac{1}{128}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^8$$
$$<\frac{1}{100}\left(0.09\right)^8$$
$$<10^{-2}(0.1)^8$$
$$=10^{-2}10^{-8}=10^{-10}$$

ដូចនេះ $\left|a_5-\sqrt{5}\right|<10^{-10}$

មេរៀនទី៣ ៖ ផែនទីគំនិត

៣.១. តើផែនទីគំនិតជាអ្វី?

ផែនទីគំនិត គឺជាដ្យាក្រាមសម្រាប់រៀបចំបណ្តុំគំនិតតំណាងឱ្យចំណេះដឹង។ ផែនទីគំនិតរួមបញ្ចូលគំនិត**គំនិត** ដែលជាធម្មតាត្រូវបានសរសេរក្នុងរង្វង់មូល ឬប្រអប់បិទជិត និងមានសញ្ញាព្រួញបង្ហាញពី**ទំនាក់ទំនង** រវាងគំនិតនីមួយៗ។ ពាក្យនៅលើបន្ទាត់បញ្ជាក់ពីទំនាក់ទំនងរវាងគំនិតនីមួយៗដែលចាត់ទុកដូចជាពាក្យភ្ជាប់ ឬឃ្លាភ្ជាប់។

លក្ខណៈមួយទៀតរបស់ផែនទីគំនិត គឺជាគំនិតនានាត្រូវបានតំណាងនៅក្នុងបែប ឋានានុក្រមជាមួយនឹងការរាប់បញ្ចូលគំនិតទូទៅជាងគេ និងសំខាន់ជាងគេត្រូវបានតម្រៀបនៅលើគេបំផុត រីឯគំនិតដែលទូទៅនិងសំខាន់បន្ទាប់ត្រូវបានតម្រៀបនៅលំដាប់បន្ទាប់ខាងក្រោម។ រចនាសម្ព័ន្ធឋានានុក្រមសម្រាប់គំនិតចំណេះដឹងសំខាន់ៗនេះ ត្រូវបានពឹងផ្អែកទៅតាមបរិបទចំណេះដឹងដែលកំពុងប្រើប្រាស់ ឬយកមកគិត។ ដូច្នេះការបង្កើតផែនទីគំនិត ជាមួយនឹងសំណួរពិសេស ដែលយើងកំពុងរកចម្លើយហៅថា **សំណួរផ្តោត**។

ការប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិតនៅក្នុងថ្នាក់រៀនអាចមានភាពងាយស្រួលដោយសិស្សលើកយក**គំនិតសំខាន់ៗ** ចេញពីមេរៀន ឬសំណួរដែលពួកគេបានរៀនរួចងហើយ។ ឧទាហរណ៍ ការស្នើរឡើងអំពីទំនាក់ទំនងរវាងគំនិតពីរ។ ការស្នើរឡើងអាចមានគំនិត២ ឬច្រើនជាង២ ដែលមានទំនាក់ទំនងគ្នាដោយប្រើពាក្យ ឬឃ្លាភ្ជាប់ ដើម្បីធ្វើទំនាក់ទំនងរវាងគំនិត និងគំនិត។ ការបង្កើតផែនទីគំនិត គឺមិនមែនជាការងាយស្រួលប៉ុន្មានទេ ព្រោះភាពលំបាកនឹងកើតមានឡើង នៅពេលដែលសិស្សមិនធ្លាប់ ឬមិនមានទម្លាប់ប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រប្រភេទនេះ។

៣.២. ការបង្កើតផែនទីគំនិត

គ្រប់ផែនទីគំនិតទាំងអស់ត្រូវតែឆ្លើយតបទៅនឹងសំណួរផ្តោត ហើយសំណួរផ្តោតអាចនាំទៅរកផែនទីគំនិតដែលសម្បូរបែប។ នៅពេលរៀនបង្កើតផែនទីគំនិត អ្នករៀនទំនងជាងាកចេញពីសំណួរផ្តោត និងបង្កើតផែនទីគំនិតមួយ ដែលអាចមានទំនាក់ទំនងជាមួយនឹងគំនិតចំណេះដឹងសំខាន់ណាមួយ ប៉ុន្តែវាមិនអាចឆ្លើយតបទៅនឹងសំណួរផ្តោតបាន។

ជារឿយៗ គេតែងចាប់ផ្តើមឡើងជាដំបូងដោយការរៀនអំពីអ្វីដែលជាការឆ្លើយសំណួរត្រឹមត្រូវ។ ការបង្កើតផែនទីគំនិតមានបួនជំហានដូចខាងក្រោម៖

១. ជ្រើសរើស៖ កំណត់អត្តសញ្ញាណគំនិតគន្លឹះ ដែលប្រើប្រាស់នៅក្នុងគំនិត ចំណេះដឹងសំខាន់ៗ។ ការជ្រើសរើសសំណួរផ្តោតមួយ ការសរសេរចូលគ្រប់ប្រយោគគំនិត និងប្រយោគសំណើ ចេញពីអ្វីដែលអ្នកគិតថា វាមានទំនាក់ទំនងជាមួយនឹងសំណួរផ្តោត ឬប្រធានបទដែលបានរៀនរួច។ នៅក្នុងវិធីនេះរាល់ចំណេះដឹងដែលអ្នកបានរៀនទាំងអស់ត្រូវតែយកមកប្រើ។ ជាទូទៅមានគំនិតប្រហែល៥ទៅ២៥(អាស្រ័យទៅនឹងខ្លឹមសារសំណួរផ្តោត) ជាការគ្រប់គ្រាន់ហើយ។

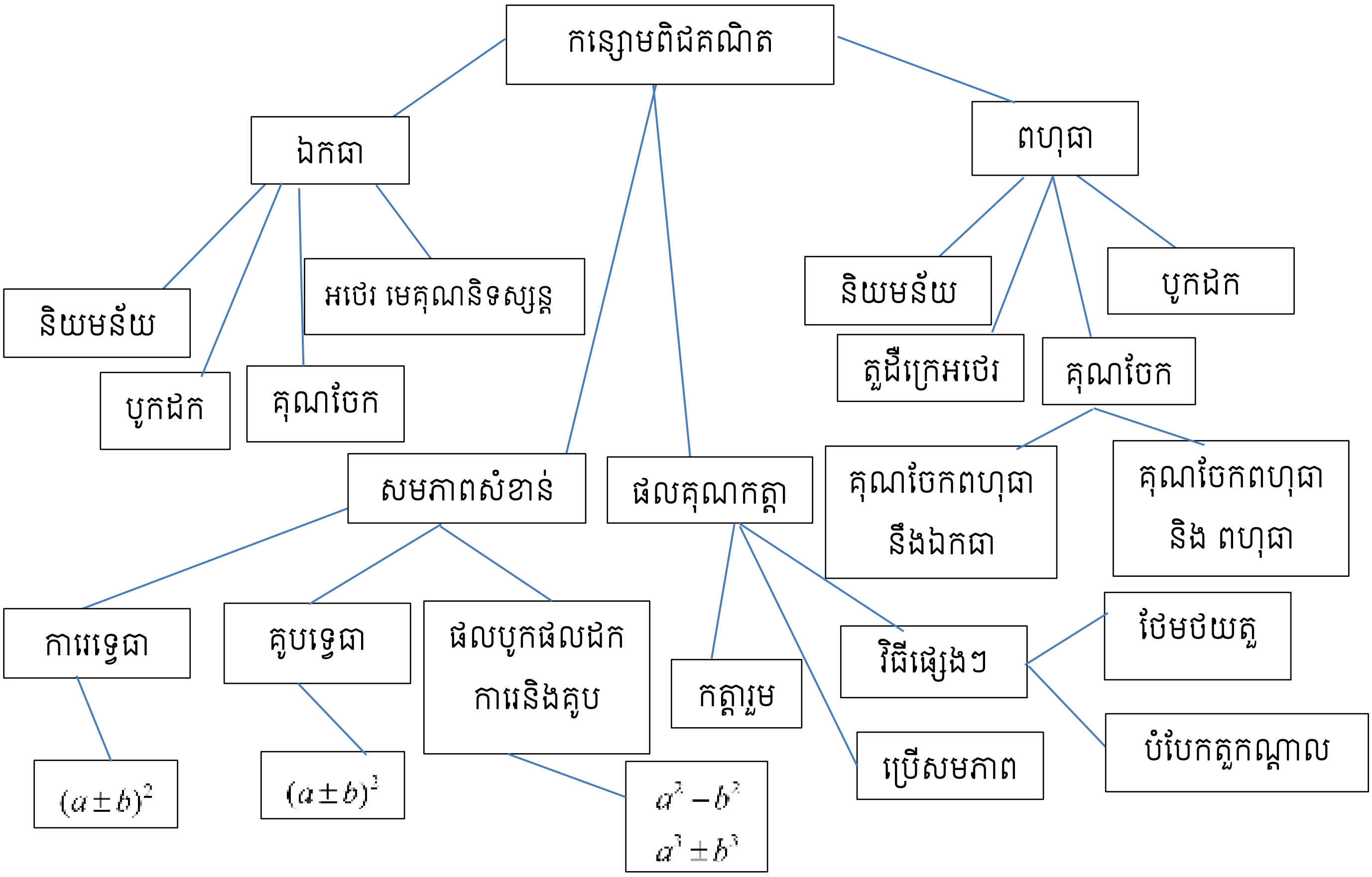
២. តម្រៀប និងចុះបញ្ជី៖ ការតម្រៀបគំនិតទាំងអស់ ចាប់ពីអរូបីរហូតដល់រូបី។ នេះមានន័យថាជាការតម្រៀបតាមលំដាប់លំដោយចាប់ពីគំនិតទូទៅ និងសំខាន់ជាងគេបំផុត ត្រូវតម្រៀបនៅខាងលើបំផុត បន្ទាប់មកគំនិតទូទៅ និងសំខាន់ត្រូវតម្រៀបនៅបន្តបន្ទាប់ រីឯគំនិតមិនទូទៅ និងមិនសំខាន់ជាងគេបំផុត ត្រូវ

តម្រៀបនៅខាងក្រោមគេ។ ពេលនេះអ្នកអាចឃើញថា បញ្ជីគំនិតមានសភាពដូចជាប្រឡោះចំណត អ្នកអាចផ្លាស់គំនិតទាំងនេះចូលក្នុងផែនទីគំនិត នៅពេលដែលអ្នកគិតថាគំនិតនោះសមស្រប និងត្រឹមត្រូវហើយ។ ប្រសិនបើអ្នកមើលឃើញនៅគំនិតខ្លះមិនល្អគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីភ្ជាប់ អ្នកអាចរក្សាទុកគំនិតខ្លះនៅក្នុងប្រឡោះចំណតដដែលបាន។ នៅពេលដែលផែនទីត្រូវបានបំពេញរួចរាល់។

៣. **ការសង់៖** សំណង់ផែនទីគំនិតដែលគ្មានពាក្យឬគ្មានឃ្លាសំណើត្រូវបានសង់ឡើងនៅដំណាក់កាលនេះ ដែលអ្នកអាចសរសេរផែនទីគំនិតបែបនេះនៅលើក្រដាសព្រាង។

៤. **ទំនាក់ទំនង៖** នៅពេលដែលផែនទីដំបូងត្រូវបានសង់រួចការភ្ជាប់ខ្វែង ត្រូវយកមកប្រើដើម្បីកំណត់ពាក្យ ឬឃ្លាសំណើ។ ទាំងអស់នេះ គឺជាការភ្ជាប់រវាងគំនិតនានាក្នុងចំណេះដឹងសំខាន់ៗនៅលើផែនទីដែលជួយបង្ហាញរបៀបដែលចំណេះដឹងសំខាន់ៗទាំងនេះ មានទំនាក់ទំនងជាមួយគ្នា។ ការភ្ជាប់ខ្វែងគឺមានសារៈសំខាន់ក្នុងការបង្ហាញថាអ្នករៀនស្វែងយល់ពីទំនាក់ទំនងរវាងគ្នា និងគ្នា។ ឃ្លាសំណើតែងតែសរសេរឡើងដោយប្រើប្រាស់ កិរិយាសព្ទ នេះជាដំណាក់កាលពិបាកជាងគេបំផុត ប៉ុន្តែជាផ្នែកដែលត្រូវប្រឹងប្រែងបំផុតដែរ។ ជារឿយៗសិស្សគិតថាវាគឺជាការលំបាកណាស់ក្នុងការបន្ថែមពាក្យភ្ជាប់ទៅលើ "ខ្សែបន្ទាត់" របស់ផែនទីគំនិតរបស់ពួកគេ។ នេះគឺដោយសារតែពួកគេមិនយល់ពីទំនាក់ទំនងទៅវិញទៅមករវាងគំនិតនីមួយៗ ពោលគឺពួកគេមិនយល់ពីអត្ថន័យរបស់គំនិតនីមួយៗតែម្តង ហើយវាគឺជាពាក្យភ្ជាប់ដែលបញ្ជាក់ពីភាពជាក់លាក់របស់ទំនាក់ទំនងនេះ។

ប្រភេទសំណួរផ្តោតធ្វើឱ្យមានភាពខុសគ្នាមួយនៅក្នុងប្រភេទផែនទីគំនិត ដែលសិស្សសង់ឡើង។ សំណួរនោះមានដូចជា " តើកន្សោមពិជគណិតគឺជាអ្វី?" នឹងនាំទៅរកផែនទីគំនិតដែលមានលំដាប់ថ្នាក់ល្អជាង និងច្បាស់លាស់ជាងសំណួរដែលសួរថា "ហេតុអ្វីបានជាយើងត្រូវសិក្សាកន្សោមពីជគណិត?" ឧទាហរណ៍មួយអំពីបញ្ជីមួយនិងផែនទីគំនិតមួយ ដែលសំណួរផ្តោតសួរថា " តើកន្សោមពីជគណិតជាអ្វី?" ដែលនាំទៅរកផែនទីគំនិតមួយដែលមានភាពច្បាស់លាស់។



៣.៣. ការប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិត នៅក្នុងថ្នាក់រៀន

ការបង្កើតផែនទីគំនិតទាំងអស់ដោយខ្លួនអ្នកផ្ទាល់គឺជា កិច្ចការពិបាកមួយដែលត្រូវការការគិតកម្រិតខ្ពស់។ ដូចដែលបានរៀបរាប់ពីមុនរួចមកហើយថា សិស្សមានបញ្ហាជាច្រើនអំពីការបង្កើតការភ្ជាប់ខ្វែងរវាងគំនិត និងគំនិត។
មានចំនុចមួយចំនួន ដែលអ្នកអាចយកមកប្រើប្រាស់បាន នៅពេលប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិតនៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

១.ការរៀបចំ៖ ពេលបង្កើតកិច្ចតែងការបង្រៀន គេអាចប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិតមួយបានសម្រាប់ជាប្រភពព័ត៌មានក្នុងការបង្រៀនប្រធានបទណាមួយ។ តាមរយៈវិធីនេះ គេអាចកំណត់វត្ថុបំណងមេរៀនដោយគិតពី បញ្ហាបានច្បាស់លាស់។

២.នៅជំហានទី៣នៃកិច្ចតែងការបង្រៀន៖ នៅក្នុងជំហាននេះមានជម្រើសខ្លះអំពីការប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិត។ ជម្រើសទាំងអស់នេះត្រូវបានតម្រៀបជាលំដាប់លំដោយចាប់ពីគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលអសកម្មហួត ដល់គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលសកម្មដូចខាងក្រោម៖

ក. បន្ទាប់ពីបង្រៀនប្រធានបទមួយចប់ ចូលបង្ហាញផែនទីគំនិតទៅកាន់សិស្សរបស់អ្នក។ នេះគឺជាវិធីល្អមួយក្នុងការសង្កេតជំពូកមួយ។

ខ.បង្ហាញគំរូផែនទីគំនិតសិស្សរបស់អ្នកសង្កេតដើម្បីជាគំរូសំណង់ផែនទីគំនិតរបស់ពួកគេ។

គ. នៅពេលអ្នកកំពុងបង្រៀន ចូរសង់ផែនទីគំនិតពេញលេញមួយជាដំណាក់ៗជាមួយសិស្សរបស់អ្នក។វាជាកិច្ចការល្អបំផុតមួយដែលផែនទីបណ្តោះអាសន្ន(នឹងអាចប្តូរបាន) នៅមានសម្រាប់សិស្សរបស់អ្នក មើលបាន។

ឃ. អ្នកអាចបង្កើតផែនទីគំនិតមួយប្រភេទ " **ធ្វើឲ្យល់** "។ គេអាចលុបចោលគំនិត ឬពាក្យភ្ជាប់ចេញពីផែនទីដែលមានស្រាប់បាន ដូច្នេះសិស្សត្រូវបំពេញនៅក្នុងផ្នែកខ្លះនៃផែនទី។ អ្នកក៏អាចបង្កើតកំហុសដោយចេតនានៅក្នុងផែនទីគំនិតបានផងដែរ ដូច្នេះសិស្សត្រូវតែស្រាវជ្រាវបន្ថែមដើម្បីកែកំហុសនេះ...។

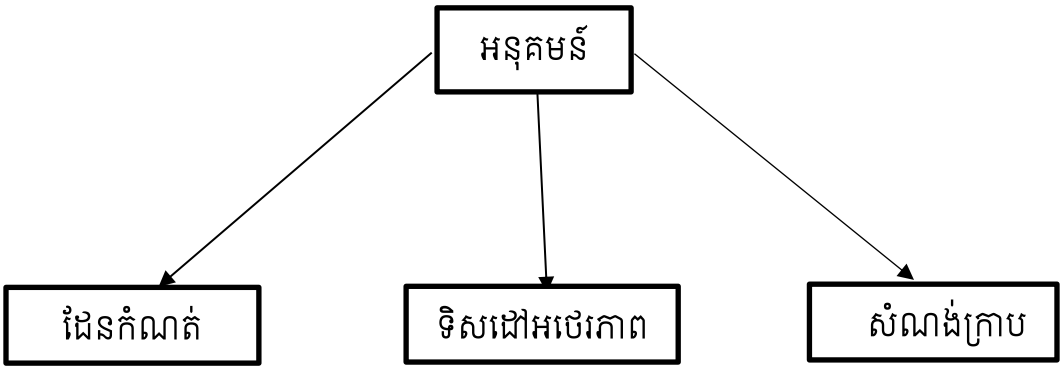
ង. ទុកពេលឲ្យសិស្សសាកល្បងបង្កើតផែនទីគំនិតដោយខ្លួនឯង។ ប្រសិនបើចាំបាច់ ឬនៅពេលសិស្សមានបញ្ហាក្នុងសំណង់ផែនទីគំនិតនេះអ្នកអាចផ្តល់គំនិតរបស់អ្នកបាន។

វិធីចុងក្រោយនេះ គឺជាវិធីសាស្ត្រដ៏មានអនុភាពបំផុតសម្រាប់សិស្ស ប៉ុន្តែវាក៏ជាវិធិសាស្ត្រមួយដែលពិបាកបំផុតផងដែរ។ ដូច្នេះ វាក៏ជាការល្អបំផុតមួយដែលអ្នកចាប់ផ្តើមជាមួយនិងលំហាត់ងាយៗ និងបន្តជាមួយនឹងលំហាត់ដែលកាន់តែពិបាកជាង ដោយផ្តោតទៅលើការណែនាំកម្រិតកាន់តែខ្ពស់ជាងមុន។

កំណត់សម្គាល់សំខាន់ៗ៖

- ផែនទីគំនិត មិនមានការចប់ទេ។
- ផែនទីគំនិតត្រឹមត្រូវ មិនមាន " ដំណោះស្រាយ " ត្រឹមត្រូវណាមួយដែលឆ្លើយតបទៅនឹងសំណួរផ្តោតមួយចំនួននោះទេ។ វត្ថុបំណងសំខាន់នៃការប្រើប្រាស់ផែនទីគំនិត គឺជាដំណើរការរបស់សិស្សក្នុងការសង់ផែនទីគំនិត។
- ខ្សែផែនទី ឬបន្ទាត់ផែនទី (នៅពេលគំនិតមួយត្រូវបានភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងជាមួយគំនិតផ្សេងទៀតដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ) បង្ហាញពីការយល់ដឹងកម្រិតទាប។

ជំហាននៃការសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍



កិច្ចតែងការបង្រៀនទី១

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ជំពូកទី៣៖ សមីការ និងវិសមីការ

មេរៀនទី១៖សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី

បង្រៀនថ្នាក់៖ ទី១០

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃទី ៣០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០២០

I. **វត្ថុបំណងមេរៀន** ក្រោយបញ្ចប់ខ្លឹមសារមេរៀន សិស្សនឹងទទួលបាន៖

- **វិជ្ជាសម្បទា** ៖ បង្ហាញពីវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយលំហាត់តាមឌីសគ្រីមីណង់បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **បំណិនសម្បទា** ៖ ដោះស្រាយលំហាត់ បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- **ចរិយាសម្បទា** ៖ មានសាមគ្គីភាពក្នុងក្រុម និងពិភាក្សាដោះស្រាយបញ្ហា។

II. **ខ្លឹមសារមេរៀន**

- ១.៣ រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២

III. **សម្ភារឧបទេស**

- សៀវភៅគោលគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ទំព័រទី (១០៣-១០៦) និងសន្លឹកកិច្ចការ

IV. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល(**បែបសហការ-ផែនទីគំនិត**)

V. **ដំណើរការមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (០២នាទី)	
គ្រូត្រួតពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់	រដ្ឋបាលថ្នាក់	រៀបចំសណ្តាប់ធ្នាប់
	ជំហានទី២៖ រម្លឹកមេរៀន (០៥នាទី)	
-តើវិធីដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ មានអ្វីខ្លះ?	រម្លឹក	-សិស្សធ្វើបញ្ជី ១.ដាក់ផលគុណកត្តា ២.បំពេញជាការេ ៣.លក្ខណៈឬសការេ

		៤.ឌីសគ្រីមីណង់(ការទស្សន៍ទាយ)
	ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣០នាទី)	
-ចែកក្រុមសិស្សមួយក្រុម៤នាក់ -ចែកបណ្ណកាត(ឯកសារទី១)ដើម្បីឲ្យសិស្សដាក់ក្នុងផែនទីគំនិត(ឯកសារទី២) -សម្របសម្រួលតាមក្រុម -សរុប និងពន្យល់បន្ថែម	**ជំពូកទី៣ សមីការ និងវិសមីការ** **មេរៀនទី១** **សមីការដឺក្រេទី១** មានមួយអញ្ញាត **១.៣ រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២** **ជាទូទៅ៖** សមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត រូបមន្តឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$ $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ប្រភេទចម្លើយ -បើ $\Delta>0$ សមីការមានចម្លើយ២ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា។ -បើ $\Delta=0$ សមីការមានចម្លើយឌុប $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ ។ -បើ $\Delta<0$ សមីការមានចម្លើយជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។ **ចំណាំ៖** b ជាចំនួនគូ គេដោះស្រាយសមីការតាមរូបមន្ត Δ' ដែល $\Delta'=(b')^2-ac\ ,\left(b'=\dfrac{b}{2}\right)$ ហើយ $x=\dfrac{-b'\pm\Delta'}{a}$ ។	 -ពិភាក្សាក្រុម និងមើលសៀវភៅសិក្សាគោល -បង្ហាញចម្លើយ
	ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ (០៥នាទី)	
-ដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សអនុវត្ត	ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ក. $y^2-20y+51=0$ ខ. $\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{2}{3}x+1=0$	

	ចម្លើយ ក. $y^2-20y+51=0$ $\Delta'=(10)^2-51=49$ $x_1=17$, $x_2=3$ ខ. $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$ $\Delta'=\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}=0$ $x_1=x_2=3$	ចម្លើយ ក. $y^2-20y+51=0$ $\Delta'=(10)^2-51=49$ $x_1=17$, $x_2=3$ ខ. $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$ $\Delta'=\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}=0$ $x_1=x_2=3$
ជំហានទី៥៖ បណ្តាំផ្ញើ (០៥នាទី)		
-បណ្តាំផ្ញើ	ចូរដោះស្រាយសមីការ $5\sqrt{5}x^2-10x+\sqrt{5}=0$ $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}=0$	ស្តាប់ការណែនាំ

កិច្ចតែងការបង្រៀនទី២

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ជំពូកទ៣ ៖ សិក្សាអនុគមន៍ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី៦ ៖ សិក្សាអនុគមន៍សនិទាន

រយៈពេល ៖ ៥០ នាទី

បង្រៀនថ្នាក់ទី ៖ ១២

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃទី៣០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០២០

I. វត្ថុបំណងមេរៀន

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សបង្ហាញបានពីលក្ខណៈនៃប្លង់សិក្សានៃអនុគមន៍សនិទាន បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈកិច្ចការស្រាវជ្រាវជាបុគ្គល ។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សបកស្រាយបាននូវរបៀបសិក្សាអនុគមន៍សនិទានយ៉ាងជំនាញតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម និងសំណួរបំផុសរបស់គ្រូ ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សយកយកចិត្តទុកដាក់ និងប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការសិក្សាអថេរភាពអនុគមន៍ ។

II. ខ្លឹមសារមេរៀន

- សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

III. សម្ភារៈឧបទេស

- សៀវភៅពុម្ពសិស្ស សន្លឹកលំហាត់ កម្រងសំណួរ ។

IV. វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖ គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V. ដំណើរការនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១៖ លំនឹងថ្នាក់(៣នាទី)	
-ពិនិត្យអវត្តមានសិស្ស អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់រៀន	រដ្ឋបាលថ្នាក់	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
	ជំហានទី២៖ រម្លឹកមេរៀនចាស់ (៥នាទី)	
	រម្លឹកមេរៀនចាស់ ចូររកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍	

Ex1: ចូររកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$ -ថ្ងៃមុនលោកគ្រូបានដាក់កិច្ចការស្រាវជ្រាវអំពីប្លង់សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0$ និងរបៀបគណនា ។ -ហៅសិស្ស២ ឬ៣នាក់សួរអំពីប្លង់សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ និងរបៀគណនាខ្លះ ។ -តើអនុគមន៍ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ក្រោយពីដេរីវេ វាជាអនុគមន៍យ៉ាងដូចម្តេច ? -តើអនុគមន៍ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ មានអាស៊ីមតូតអ្វីខ្លះ ? -តើផ្ចិតឆ្លុះបានមកពីណា ?	$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$	-សិស្សធ្វើជាបុគ្គល និងម្នាក់ឡើងធ្វើលើក្តារខៀន $y=x-3+\frac{1}{x-2}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=0$ $\therefore y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត **-ប្លង់សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍** $y=\frac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0$ **ក.ដែនកំណត់** -ដែនកំណត់ **ខ. ទិសដៅអថេរភាព** -ដេរីវេ -សញ្ញាដេរីវេ -តម្លៃបរមា -លីមីតចុងដែន (បញ្ជាក់អាស៊ីមតូតឈរ និងដេក) -គូសតារាងអថេរភាព **គ. សង់ក្រាប** -ចំណុចប្រសព្វខ្សែកោង និងអ័ក្ស -ផ្ចិតឆ្លុះជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតដេកនិងឈរ
ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី (៣០នាទី)		
-បែងចែកសិស្សជា៦ក្រុម និង១ក្រុមមានគ្នា៥នាក់ (ក្រុមចម្រុះ)	-ដេរីវេ $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ -លីមីត $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0, a\in R$	-សិស្សធ្វើលំហាត់តាមក្រុម

-ដាក់ឧទាហរណ៍ដែលដោះស្រាយតាមវិធានខាងលើ

-សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

-បើក្រុមណាមានបញ្ហា គ្រូអាចសួរសំណួរបំផុស អំពីដេរីវេ និងរបៀបសិក្សាសញ្ញា និងត្រង់លីមីតចុងដែន

-ឲ្យចម្លើយដើម្បីឲ្យសិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{x}=\pm\infty$

-សញ្ញាទ្វេធា និងត្រីធា

$f(x)=ax+b$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x)	ផ្ទុយ a	ដូច a	

$f(x)=ax^2+bx+c$

ករណី $\Delta>0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	ផ្ទុយ a	ផ្ទុយ a	ផ្ទុយ a	

ករណី $\Delta=0$

x	$-\infty$	$x_1=x_2$	$+\infty$
f(x)	ដូច a	ដូច a	

ករណី $\Delta<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	ដូច a	

មេរៀនទី១៖ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

១. **អនុគមន៍** $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

១.១ **សិក្សាអនុគមន៍** $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

ឧទាហរណ៍៖ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

▪ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$

$\therefore x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

▪ទិសដៅអថេរភាព

-សិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់

<table>
<tr>
<td>-សួរសំណួរបញ្ជាក់អំពីសញ្ញាដេរីវេ
ហេតុអ្វីបានជា f' យកសញ្ញាតាម
x^2-4x+3</td>
<td>-ដេរីវេ
$f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$
$f'(x)=\dfrac{(x^2-5x+7)'(x-2)-(x-2)'(x^2-5x+7)}{(x-2)^2}$
$f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-2)-(x^2-5x+7)}{(x-2)^2}$
$f'(x)=\dfrac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}$
$\therefore f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$
-សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ
យើងមាន $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$
ដោយ $(x-2)^2>0 \quad \forall x\in D$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $x^2-4x+3=0$
រាង $a+b+c=0\Rightarrow x_1=1$, $x_2=3$
តារាងសញ្ញាដេរីវេនៃ f
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>‖</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
</table>
$\therefore x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$
$x\in(1,2)\cup(2,3)\Rightarrow f'(x)<0$
$x=1, x=3\Rightarrow f'(x)=0$
-បរមា
- $f'(x)=0$ ត្រង់ $x=1$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះ f អតិបរមា និងមានតម្លៃអតិបរមា $f(1)=-3$
- $f'(x)=0$ ត្រង់ $x=3$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះ f មានអប្បបរមា និងមានតម្លៃអប្បបរមា $f(3)=1$
-លីមីតចុងដែន
▪ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$
▪ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\pm\infty$</td>
<td>និងកត់ត្រា

-ដោយ $(x-2)^2>0$ ចំពោះ $x\neq 2$</td>
</tr>
</table>

▪ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=\dfrac{4-10+7}{2-2}=-\infty$

▪ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=\dfrac{4-10+7}{2-2}=+\infty$

▪តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

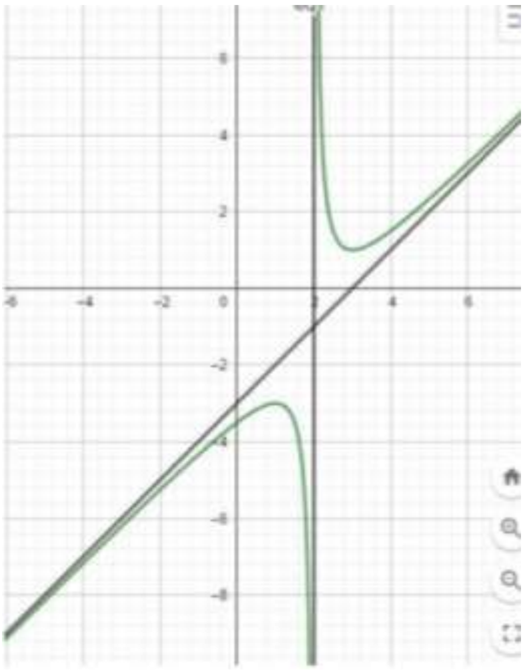
▪សង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វ C និងអ័ក្ស $(x'ox)$ គឺ

$y=0\Rightarrow x^2-5x+7=0$

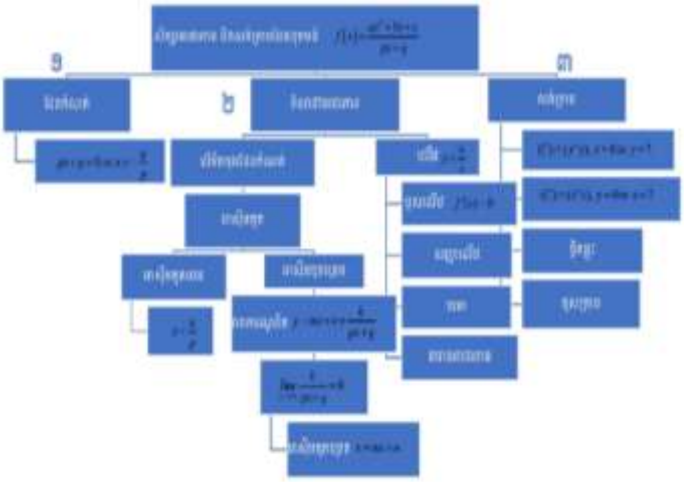
$\Delta<0$ នោះក្រាប C មិនកាត់តាមអ័ក្ស $(x'ox)$ ទេ

-ចំណុចប្រសព្វ C និងអ័ក្ស $(y'oy)$ គឺ $x=0\Rightarrow y=-\dfrac{7}{2}$



-ដើម្បីសង់ក្រាបមួយបានជោគជ័យ តើយើងត្រូវធ្វើអ្វីខ្លះ ?

-គ្រូណែនាំសិស្សគូសផែនទីគំនិត

សង់ក្រាប { សង់អាស៊ីមតូត ដោចំណុចបរមា សង់ក្រាប		
ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ (៧នាទី)		
ឲ្យសិស្សសង្ខេបឡើងវិញដោយប្រើផែនទីគំនិតនៃប្លង់សិក្សាអនុគមន៍ដើម្បីងាយចងចាំដោយផ្អែកលើកត្តាខាងក្រោម ៖ ១. ជ្រើសរើសសញ្ញាណ ២. តម្រៀប និងចុះបញ្ជី (លម្អិត) ៣. សង់ផែនទីគំនិត ៤. ទំនាក់ទំនង		សិស្សគូសផែនទីគំនិត -ជ្រើសរើសសញ្ញាណប្លង់សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប -តម្រៀបនិងចុះបញ្ជី (រៀបតាមខ្លឹមសារខាងលើ តាមលំដាប់ឲ្យលម្អិត) -ទំនាក់ទំនង (សិស្សបង្ហាញអំពីទំនាក់ទំនងអំពីផែនទីគំនិត)
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ (៥នាទី)		
-គ្រូដាក់កិច្ចការផ្ទះ	សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}$	-សិស្សស្តាប់តាមការណែនាំរបស់គ្រូ

មេរៀនទី៤ ៖ អនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងបានដឹងហើយថា គណិតវិទ្យាត្រូវបានយកអនុវត្តយ៉ាងទូលំទូលាយក្នុងជីវភាពរស់នៅរបស់យើង។ ក្នុងនោះយើងកត់សម្គាល់ឃើញថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យា ក៏បានដើរតួនាទីមួយយ៉ាងសំខាន់ ក្នុងវិស័យវិទ្យាសាស្រ្ត សេដ្ឋកិច្ច ហិរញ្ញវត្ថុ ។ល។

ច្បាប់ត្រជាក់របស់លោកញ៉ូតុន (Newton′s Cooling law)

លោក ញ៉ូ តុន ដែលជារូបវិទូដ៏ល្បីល្បាញបានរកឃើញថា អត្រាបម្រែបម្រួល (អត្រាចុះត្រជាក់)នៃសីតុណ្ហភាពរបស់អង្គធាតុមួយសមាមាត្រទៅនឹងផលសងរវាងសីតុណ្ហភាពរបស់អង្គធាតុនិងសីតុណ្ហភាពមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញអង្គធាតុនោះ។ តាមពំនោលខាងលើមានន័យថានៅខណៈពេល t បើអង្គធាតុមួយមានសីតុណ្ហភាព T ដែលស្ថិតក្នុងបរិយាកាសមួយដែលមានសីតុណ្ហភាពជាមធ្យម T_m នោះគេបាន អត្រាបម្រែបម្រួលសីតុណ្ហភាពនៃអង្គធាតុនោះកំណត់ដោយ $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_m)$ ដែល k ជាមេគុណសមាមាត្រ $(k>o)$ ។

យើងឃើញថា សមីការខាងលើជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ។ ដូចនេះ សីតុណ្ហាភាពនៃអង្គធាតុក្នុងខណៈពេលនីមួយៗកំណត់ដោយ

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_m)\Leftrightarrow\frac{dT}{dt}+kT=kT_m$$

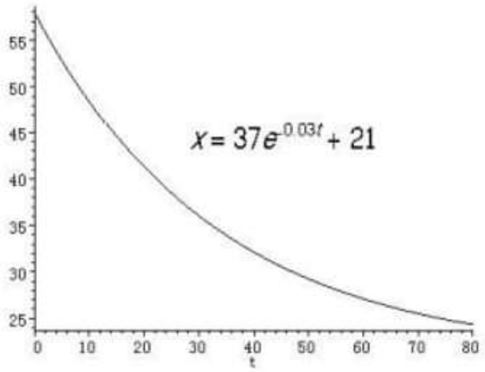
$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}T\right)=kT_me^{kt}$$

$$\Rightarrow e^{kt}T=\int kT_me^{kt}=T_me^{kt}+C$$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

$$\Rightarrow T=T_m+Ce^{-kt}$$

បើគេដឹង $T(t_0)=T_0\ ;\ t_0=0$ នោះគេបាន $T_0=T_m+C\Rightarrow C=T_0-T_m$

ដូចនេះ សីតុណ្ហភាពក្នុងខណៈពេល t កំណត់ដោយ $T(t)=T_m+(T_0-T_m)e^{-kt}$ ។



ឧទាហរណ៍៖ ទឹកដែលដាំពុះមួយកំសៀវត្រូវបានលើកចេញពីចង្ក្រាន ដែលស្ថិតក្នុងបរិយាកាសដែលមានសីតុណ្ហភាពធម្មតា $32°C$ ។ បីវិនាទីក្រោយមក សីតុណ្ហភាពទឹកមាន $90°C$ ។

ក. សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងឱ្យអត្រាបម្រែបម្រួលនៃសីតុណ្ហភាពទឹក ។

ខ. ចូរគណនាសីតុណ្ហភាពទឹក នៅខណៈពេល $t=30s$ ។

ចម្លើយ

ក. សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងឱ្យអត្រាបម្រែបម្រួលនៃសីតុណ្ហភាពទឹក

តាង T ជាសីតុណ្ហភាពទឹកនៅខណៈ t

T_m ជាសីតុណ្ហភាពបរិយាកាសនោះ $T_m = 32°C$

តាមច្បាប់ចុះត្រជាក់សីតុណ្ហភាពរបស់ញូតុន គេបានអត្រាបម្រែបម្រួលសីតុណ្ហភាពនៃទឹកកំណត់ដោយ

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - 32) \text{ ដែល } k > 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\frac{dT}{dt} = -k(T-32)$ ដែល $k > 0$ ។

ខ. ចូរគណនាសីតុណ្ហភាពទឹក នៅខណៈពេល $t = 30s$

គេមាន

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-32) \Rightarrow T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt} = 32 + (T_0 - 32)e^{-kt}$$

ដោយ $T_0 = 100°C$ នោះគេបាន $T(t) = 32 + 68e^{-kt}$

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $T(3) = 90°C$ នោះគេបាន $90 = 32 + 68e^{-3k} \Rightarrow k = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{90-32}{68}\right) \approx 0.05$

នាំឱ្យ $T(t) = 32 + 68e^{-0.05t}$

ដូចនេះ សីតុណ្ហភាពទឹកនៅខណៈពេល $t = 30s$ គឺ $T(30) \approx 32 + 68e^{-1.5} \approx 47.17°C$ ។

ចលនាស្មុះស្មើ

ឧបមាថា អង្គធាតុមួយកំពុងចរដោយចលនាស្មុះស្មើនៅលើផ្លូវត្រង់មួយ ដែលមានល្បឿនដើម $v(0) = v_0$ ត្រង់ទីតាំងចេញដំណើរ $x(0) = x_0$ ។

នោះតាមនិយមន័យល្បឿនខណៈ និងសំទុះ

គេទាញបាន

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t) & (1) \\ \frac{dv}{dt} = a & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = a$ ដែលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២តាងឱ្យចលនាស្មុះស្មើ ឬឃើតស្មើនៃអង្គធាតុ ។

តាមសមីការ (2) គេបាន $\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow v(t) = at + C_1$ ដែល C_1 ជាចំនួនថេរ ។

ដោយ $v(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0$

យើងបាន $v(t) = at + v_0$

តាមសមីការ (1) គេបាន $\frac{dx}{dt} = v(t) = at + v_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C_2$ ដែល C_2 ជាចំនួនថេរ ។

ដោយ $x(0) = x_0 \Rightarrow C_2 = x_0$

យើងបាន $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ ដែលជាចម្ងាយចរដែលអង្គធាតុធ្វើបាន ។

វិធីម្យ៉ាងទៀត បើគេតាង $x_1 = x$; $x_2 = x_1$ នោះគេអាច តាងឱ្យចលនាខាងលើដោយប្រព័ន្ធសមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 & (1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a & (2) \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX + G \quad ; X\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

ដែល $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $G = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

គេមាន $\det(A - Ir) = 0 \Rightarrow r = 0$

ដោយ $(A - Ir)K = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

នោះ គេទាញបាន $(A - Ir)K_1 = K \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

គេបាន ម៉ាទ្រីស eigenvector នៃម៉ាទ្រីស A គឺ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

នាំឱ្យ ម៉ាទ្រីស Jordan កំណត់ដោយ $J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

គេបាន $\exp(Jt) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi(t) = T\exp(Jt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

នាំឱ្យ $X_H(t) = \psi(t)C = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$ ដែល $C_1; C_2$ ជាចំនួនថេរ ជាចម្លើយអូម៉ូសែន ។

តាង $X_p(t) = \psi(t)U(t)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ គេបាន

$$U'(t) = \psi^{-1}(t)G(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -at \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow U(t) = \int \begin{pmatrix} -at \\ a \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}at^2 \\ at \end{pmatrix}$$

នាំឱ្យ $X_p(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}at^2 \\ at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}at^2 + at^2 \\ at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}at^2 \\ at \end{pmatrix}$

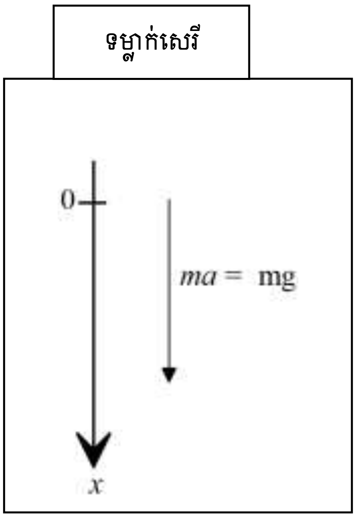
ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ $X(t) = X_H(t) + X_P(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}at^2 + C_2 t + C_1 \\ at + C_2 \end{pmatrix}$ ដែល $C_1; C_2$ ជាចំនួនថេរ ។

ដោយ $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ $X(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ at + v_0 \end{pmatrix}$ ។

ទម្លាក់សេរី

ឧបមាថា អង្គធាតុមួយដែលមានម៉ាស់ m (គិតជា kg) បានធ្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកម្ពស់ h (គិតជា m) នោះតាមច្បាប់ទី២ របស់លោកញ៉ូតុន យើងបានកម្លាំងដែលមានអំពើលើអង្គធាតុនោះកំណត់ដោយ $F=m\cdot a$ ដែល F ជាកម្លាំងដែលមានអំពើលើអង្គធាតុ (គិតជា N) ហើយ a គឺជាសំទុះ (គិតជា m/s^2) ។ យើងបានដឹងរួចហើយថា បើគ្មានកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ នោះសំទុះ a មានតម្លៃស្មើនឹងសំទុះទំនាញផែនដី g ដែលមានតម្លៃស្មើ $9.81m/s^2$ ។ ម្យ៉ាងទៀត តាមនិយមន័យសំទុះ គេក៏ដឹងដែរថា សំទុះគឺជាអត្រាបម្រែបម្រួលល្បឿនក្នុងមួយខ្នាតពេល មានន័យថា $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$ ។



ដូចនេះ គេទាញបានទំនាក់ទំនង $\frac{d^2y}{dt^2}=g$ ដែលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរ តាងឱ្យចលនាទំលាក់សេរីមួយនេះ ។

តាមទំនាក់ទំនងនេះ គេទាញបាន $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=g\Rightarrow v(t)=gt+C_1$

ដែល C_1 ជាចំនួនថេរ ។

បើល្បឿនដើម $v(0)=0$ នោះគេបាន $v(t)=gt$

តាមនេះ គេបានកម្ពស់ធ្លាក់នៃអង្គធាតុជាអនុគមន៍នៃ t កំណត់ដោយ

$y(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_2$ ដែល C_2 ជាចំនួនថេរ។

បើ $y(0)=0$ នោះគេបាន $y(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ។

លើសពីនេះ បើអង្គធាតុនេះ ត្រូវការរយៈពេល T ដើម្បីធ្លាក់ដល់ដី គេទាញបានកម្ពស់របស់អាគារនេះគឺ $h=\frac{1}{2}gT^2$ ។

លំយោលអាម៉ូនិច

នៅពេលយើងថ្លក់វត្ថុមួយដែលមានម៉ាស់ ទៅនឹងរ៉ឺស័រមួយ (ម៉ាស់នៃរ៉ឺស័រមិនត្រូវបានគិត) យើងសង្កេតឃើញថា ទម្ងន់ F នៃវត្ថុនោះបានធ្វើឱ្យវត្ថុនោះមានបម្លាស់ទី x ពីទីតាំងដើម។ លើសពីនេះ គេពិនិត្យឃើញថា កម្លាំង ឬទម្ងន់ដែលមានអំពើលើវត្ថុនោះ សមាមាត្រទៅនឹងបម្លាស់ទីរបស់វា(ច្បាប់ *Hooke*)។ ចលនាបែបនេះត្រូវបានហៅថា លំយោលអាម៉ូនិច ដែលយើងនឹងធ្វើការសិក្សាទៅលើពីរករណីដែលអាចកើតឡើង ។

- **ករណីគ្មានកម្លាំងកកិត**

ប្រសិនបើគេមិនគិតពីកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ ឬកម្លាំងផ្សេងៗ យើងសង្កេតឃើញថាកម្លាំង F ដែលបានប្រើនោះមិនត្រូវបានរំខានឡើយ។ ដូចនេះតាមច្បាប់ Hooke ខាងលើគេទាញបាន $F=-k\times x$ ដែល k ហៅថាថេរកំរាញសមាមាត្រ (ថេរកំរាញនៃរ៉ឺស័រ $k>0$)។ តែតាមច្បាប់ទីពីរញ៉ូតុន គេមាន $F=ma$ នោះគេទាញបានទំនាក់ទំនង $ma=-k\times x$ ។ ដោយ $a=\frac{d^2x}{dt^2}=x''(t)$ នោះគេបាន $mx''+kx=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងឱ្យលំយោលអាម៉ូនិចដែលគ្មានកម្លាំងកកិត (កម្លាំងទប់ទល់)។

- **ករណីមានកម្លាំងកកិត**

ប្រសិនបើកម្លាំងត្រូវបានរំខានដោយកម្លាំងផ្សេងទៀត(ឧទាហរណ៍ កម្លាំងទប់នៃខ្យល់ ឬក៏កម្លាំងកកិត) ដែលសមាមាត្រទៅនឹងល្បឿននៃអង្គធាតុ ពោល $F_1 = \alpha v$ ដែល α ជាចំនួនថេរវិជ្ជមានតាងឱ្យមេគុណសមាមាត្ររវាងកម្លាំងកកិត និងល្បឿនរបស់អង្គធាតុ។ តាមច្បាប់ទីពីរញ៉ូតុន និងច្បាប់ Hooke គេបាន ទំនាក់ទំនងថ្មីមួយតាងឱ្យលំយោលអាមូនិចគឺ $F + F_1 = -kx \Leftrightarrow ma = -kx - \alpha v$ ។

ដោយល្បឿន $V(t) = x'(t)$ និង $a = x''(t)$ នោះគេបាន $mx'' + \alpha x' + kx = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងឱ្យលំយោលអាម៉ូនិចក្នុងករណីមានកម្លាំងកកិត។

ឧទាហរណ៍៖ គេព្យួរដុំដែកមួយដែលមានម៉ាស $m = 500g$ ទៅនឹងរ៉ឺស័រមួយ។ គេសង្កេតឃើញថារ៉ឺស័រលូតបាន $50cm$ ពីទីតាំងដើម។ ដោយយកកម្លាំងកកិតស្មើពីរដងនៃល្បឿនដុំដែកដែលមានល្បឿនដើម $2m/s$ ហើយយកសំទុះទំនាញផែនដី $g = 9.8m/s^2$ ចូររកប្រវែងសាច់លូតនៃរ៉ឺស័រជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល t ។

ចម្លើយ៖ តាង $x(t)$ ជាប្រវែងសាច់លូតនៃរ៉ឺស័រជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល t

នោះគេបាន សមីការតាងឱ្យចលនាខាងលើគឺ $mx'' + \alpha x' + kx = 0$

គេមាន $F = -kx \Leftrightarrow mg = kx$ ព្រោះ g, x មានទិសដៅដូចគ្នា

នោះគេបាន $k = \dfrac{mg}{x} = \dfrac{0.5 \times 9.8}{0.5} = 9.8$

គេបានសមីការខាងលើអាចសរសេរ $0.5x'' + 2x' + 0.5x = 0 \Leftrightarrow x'' + 4x' + x = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2 + 4r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 - 3 = 0 \Rightarrow r = -2 \pm \sqrt{3}$

យើងបាន $x(t) = C_1 e^{(-2-\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-2+\sqrt{3})t}$ ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ។

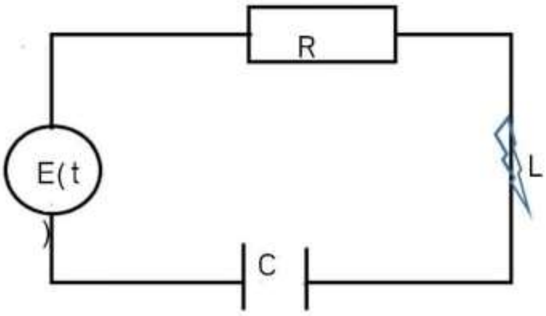
ដោយ $x(0) = 0$, $v(0) = x'(0) = 2$ គេបាន

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ (-2-\sqrt{3})C_1 + (-2+\sqrt{3})C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $x(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} e^{(-2-\sqrt{3})t} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} e^{(-2+\sqrt{3})t}$ ។

សៀគ្វីអគ្គិសនី

ចូរយើងពិនិត្យទៅលើបង្គុំសៀគ្វីអគ្គិសនីមួយដែលមាន អាំងឌុចទ័រ រេស៊ីស្តង់ និង ការ៉ាប៉ាស៊ីតេដូចរូបខាងក្រោម។



បើយើងយក $q(t)$ ជាបរិមាណបន្ទុកអគ្គិសនីក្នុងខណៈពេល t នោះគេបាន អាំងតង់ស៊ីតេចរន្តអគ្គិសនីនៅខណៈពេល t គឺ $I(t) = \dfrac{dq}{dt}$ ។ម្យ៉ាងទៀត គេពិនិត្យឃើញថា តង់ស្យុងអគ្គិសនីដែលឆ្លងកាត់តាមផ្នែកនីមួយៗនៃបង្គុំសៀគ្វីនេះកំណត់ដោយ

- រេស៊ីស្តង់: $U_R(t)=RI(t)=R\dfrac{dq}{dt}=Rq'$
- ការប៉ាស៊ីតេ: $U_C(t)=\dfrac{q}{C}$
- អាំងឌុចទ័រ: $U_L(t)=L\dfrac{dI}{dt}=L\dfrac{d^2q}{dt^2}=Lq''$

តាមច្បាប់ Kirchoof គេបាន តង់ស្យុងអគ្គិសនីដែលឆ្លងកាត់សៀគ្វីកំណត់ដោយ

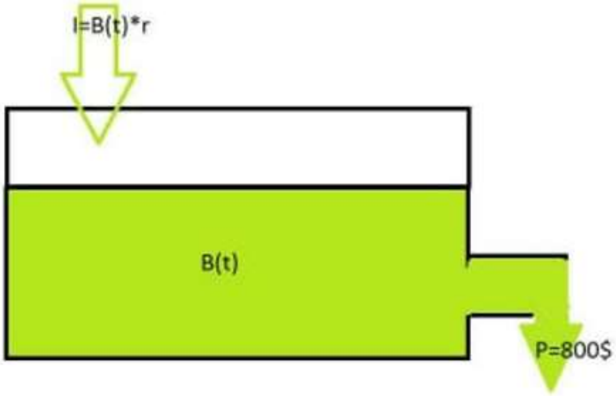
$Lq''+Rq'+\dfrac{1}{C}q=E(t)$ ដែលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងឱ្យតង់ស្យុងអគ្គិសនីឆ្លងកាត់សៀគ្វីនេះ។

ការបង់រំលោះក្នុងវិស័យហិរញ្ញវត្ថុ

ឧទាហរណ៍៖ សុខាមានបំណងចង់ខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារដើម្បីទិញផ្ទះមួយខ្នង។ គាត់ដឹងច្បាស់ថាគាត់មានលទ្ធភាពបង់រំលោះធនាគារមិនលើសពី 800$ ក្នុងមួយខែទេ។ ឧបមាថា ធនាគារយកអត្រាការប្រាក់គឺ 9% (ការប្រាក់សមាស) ហើយការសងនេះមានរយៈពេល 30 ឆ្នាំ។

ក. កំណត់ចំនួនប្រាក់ដែលគាត់ជំពាក់ធនាគារនៅខណៈពេល t នីមួយៗ ។

ខ. កំណត់ការប្រាក់សរុបដែលគាត់ត្រូវបង់ទៅធនាគារក្នុងរយៈពេល 30 ឆ្នាំនេះ ។



ចម្លើយ៖ ក. កំណត់ចំនួនប្រាក់ដែលគាត់ជំពាក់ធនាគារនៅខណៈពេល t នីមួយៗ

តាង $B(t)$ ជាប្រាក់ដែលជំពាក់ធនាគារនៅខណៈពេល t

B_0 ជាប្រាក់ខ្ចីនៅដើមគ្រា

$I=B(t)\times r=0.0075\times B$ ជាការប្រាក់ប្រចាំខែដែលត្រូវបង់

$P=800$ ជាប្រាក់ដែលសុខាបង់ប្រចាំខែ

គេបាន

$$\frac{dB}{dt}=I-P=0.0075B-800\Leftrightarrow\frac{dB}{dt}-0.0075B=-800$$

$\Rightarrow B(t)=\dfrac{800}{0.0075}+Ce^{0.0075t}$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

ដោយ $B(0)=B_0$ នោះគេបាន $B_0=\dfrac{800}{0.0075}+C\Rightarrow C=B_0-\dfrac{800}{0.0075}$

នាំឱ្យ $B(t)=\dfrac{800}{0.0075}+\left(B_0-\dfrac{800}{0.0075}\right)e^{0.0075t}$

ខ. កំណត់ការប្រាក់សរុបដែលគាត់ត្រូវបង់ទៅធនាគារក្នុងរយៈពេល 30 ឆ្នាំនេះ

ដោយ $B(30\times 12)=B(360)=0$ នោះគេបាន

$$\frac{800}{0.0075}+\left(B_0-\frac{800}{0.0075}\right)e^{0.0075\times 360}=0\Leftrightarrow \frac{800}{0.0075}+\left(B_0-\frac{800}{0.0075}\right)e^{2.7}=0$$

$$\Rightarrow B_0=99498\$$$

$$\Rightarrow I_{total}=P\times t-B_0=800\times 360-99498=188502\$$$

ដូចនេះ ការប្រាក់ដែលគាត់បង់ក្នុងរយៈពេល30 ឆ្នាំគឺ 188502$ ។

តាមរយៈឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងបង្កើតបានជាគំនិតដំបូងមួយក្នុងការគណនា តម្លៃភាគហ៊ុនក្នុងទីផ្សារមូលបត្រ ដែលជាផ្នែកមួយដ៏សំខាន់ក្នុងទីផ្សារហិរញ្ញវត្ថុនាពេលបច្ចុប្បន្ន។

ដោយយក $P(t)$ ជាតម្លៃភាគហ៊ុននៅខណៈពេល t នោះគេបានអត្រាបម្រែបម្រួលនៃភាគហ៊ុនត្រូវបានកំណត់ដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $r(t)=\frac{dP}{dt}\Rightarrow P(t)=Ce^{\int r(t)dt}$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

ឧបមាថា នាដើមគ្រាតម្លៃភាគហ៊ុនមានតម្លៃ P_0 នោះគេបាន $P(t)=P_0e^{\int r(t)dt}$ ។

បើ $r(t)$ ជាចំនួនថេរ $r(t)=r$ នោះគេបាន $P(t)=P_0e^{rt}$ ដែលជារូបមន្ត គណនាប្រាក់ចំពោះ t ជាថេរជាប់។

កំណើនប្រជាជន

ដោយពិចារណាជាទូទៅ អត្រានៃកំណើនប្រជាជនហាក់ដូចជាសមាមាត្រដោយផ្ទាល់ទៅនឹងចំនួនប្រជាជន។ ដូចនេះសមីការខាងក្រោមទំនងជាត្រឹមត្រូវ។

$\frac{dN}{dt}=kN\ldots(P)$ ដែល k គឺជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន ហើយ $N=N(t)$ គឺជាចំនួនប្រជាជននៅខណៈពេល t ។ ដោយដោះស្រាយសមីការនេះ យើងបាន $N=Ce^{kt}$ សមីការនេះហៅថា **ច្បាប់នៃកំណើន** (Law of Growth) ។ ក៏ប៉ុន្តែ តើចំនួនប្រជាជនអាចកើនឡើងជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលឬទេ ? ប្រសិនបើដូច្នេះផែនដីនឹងពោរពេញដោយមនុស្សជាតិ សត្វកណ្តុរ បាក់តេរី និងប្រភេទសត្វដទៃទៀតទាំងអស់។ នៅពេលចំនួនប្រជាជនតិច វាអាចកើនឡើងជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ប៉ុន្តែនៅពេលចំនួនប្រជាជនច្រើន វាពិបាកនឹងរក្សាប្រភេទសត្វទាំងនោះ ដោយសារកង្វះខាតខាងម្ហូបអាហារ និងទីកន្លែងរស់នៅ (មានន័យថា "ភាពឆ្អែត" បានកើនឡើង)។ ដូច្នេះសមីការ (P) គួរតែកែតម្រូវដើម្បីឱ្យកំណើតប្រជាជនត្រូវបានទប់នៅពេលវាកើនឡើងច្រើន។

ឧទាហរណ៍៖ ចំពោះបរិស្ថានរបស់សត្វ (បឹងបួ និងព្រៃព្រឹក្សា) ចំនួនប្រជាជនដែលអាចផ្គត់ផ្គង់បាននឹងមានកំរិតខ្ពស់មួយដែលគេហៅថា Carrying capacity of the environment ។ អ្នកបរិស្ថានវិទ្យាតែងតែសន្និដ្ឋានថា នាពេបច្ចុប្បន្នកំណើនចំនួនមនុស្ស សត្វ កើនឡើងព្រមគ្នាទាំងទំហំ និងចំនួនក្រោម Carrying capacity របស់វា។ ចូរពិចារណាច្បាប់នៃកំណើនដែលមានលក្ខណៈសាំញ៉ាំជាង $\frac{dN}{dt}=kN(l-N),\ldots..(L)$ ដែល k និង l គឺជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន។ យោងតាមសមីការនេះអត្រានៃកំណើនកាន់តែតូចពេល N កើនឡើង។ ខ្សែកោងដែលបញ្ជាក់ថាសមីការ (L) ត្រូវបានគេហៅថាខ្សែកោង "logistic growth curve" ហើយបង្ហាញពី ច្បាប់នៃកំណើនប្រជាជនដែលកើតឡើងញឹកញាប់នៅក្នុងជីវវិទ្យា។

ឧទាហណ៍៖ ចូរដោះស្រាយសមីការ (L) ។

ដោយតម្រៀបឡើងវិញ និងដោយធ្វើអាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (L) នាំឱ្យ

$\frac{1}{N(l-N)}\frac{dN}{dt}=k$ យើងបាន

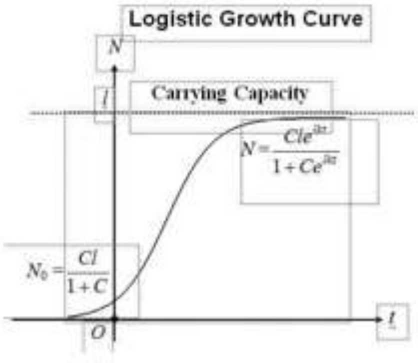
$\frac{1}{l}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{l-N}\right)=k \Leftrightarrow \frac{N'}{N}-\frac{(l-N)'}{l-N}=lk$

នាំឱ្យ $\ln\left|\frac{N}{l-N}\right|=lkt+A$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន)

ដូចនេះ $\frac{N}{l-N}=Ce^{lkt}$ $\left(C=\pm e^{A}\right)$ ។

យើងបាន $N=\frac{Cle^{lkt}}{1+Ce^{lkt}}$ (ឬ $\frac{l}{1+Ce^{-lkt}}$) ។

ខ្សែកោងខាងក្រោមគឺជាខ្សែកោង Logistic growth curve ដែលមានសមីការ $N=\frac{Cle^{lkt}}{1+Ce^{lkt}}$ ។ ដូចដែលបានឃើញហើយតម្លៃ N កើនឡើងជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅពេល t តូចហើយខិតទៅរកតម្លៃចំនួនថេរ l (ប៉ុន្តែមិនដែលលើស l ទេ) នៅពេល t មានតម្លៃធំល្មម។ តម្លៃចំនួនថេរ l ត្រូវបានគេហៅថា"carrying capacity" (មានន័យថាចំនួនប្រជាជនគង់វង្សអតិបរមា/ maximum sustainable Population)។



លំហាត់

១. គេដឹងថា ពាក់កណ្ដាលវដ្តនៃជីវិតរបស់ធាតុវិទ្យុសកម្មរ៉ាដ្យូមដែលមានឈ្មោះ226 មានរយៈ1600 ពេលឆ្នាំ មានន័យថា 1600 ឆ្នាំក្រោម បរិមាណនៃរ៉ាដ្យូម $1kg$ និងនៅសល់ត្រឹមតែ $500g$ ។បើបរិមាណរ៉ាដ្យូមពេលនេះ មានចំនួន $1g$ តើ 400 ឆ្នាំក្រោយបរិមាណនៃរ៉ាដ្យូមនេះនៅសល់ប៉ុន្មាន ?

២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលតាងឱ្យកំណើនប្រជាជនតំបន់មួយត្រូវបានកំណត់ដោយ $\frac{dp}{dt}=p(ap-b)$ ដែល a និង b ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន ហើយ t ជារយៈពេលគិតជាឆ្នាំ ចំណែក p តាងឱ្យចំនួនប្រជាជននៅខណៈពេល t ។តើគេអាចសន្និដ្ឋានបានយ៉ាងណាខ្លះពីចំនួនប្រជាជនក្នុងតំបន់នេះ នៅពេលដែល $t\to\infty$?

៣.ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (oxy) នៃប្លង់ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 4xdy+xdx=0$ ដែលមានក្រាប (c) តាងឱ្យចម្លើយ។ ចូរបញ្ជាក់ប្រភេទនៃក្រាប (c) បើគេដឹងថាក្រាប (c) កាត់ចំណុច $(2,0)$ ។

៤.គេមានគម្រូស្ថិតិប្រជាជនដែលបកស្រាយដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dN}{dt}=\alpha N\left[1-\left(\frac{N}{N_\infty}\right)^{\beta-1}\right]$ ដែល $\beta>1$ ។

ក.ចូរសរសេរចំនួនប្រជាជន N ជាអនុគមន៍នៃ t រួចសង់ក្រាបនៃចម្លើយនេះចំពោះ $\alpha=1$ និង $\beta=2;2.5;3$ ។

ខ.សន្និដ្ឋានពីចំនួនប្រជាជន នៅពេលដែល $t\to\infty$ ។

៥.គម្រូនៃកំណើនប្រចាំរដូវមួយឱ្យដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dx}{dt}=rx\cos(\omega t)$ ដែល r,ω ជាចំនួនថេរ ដែលមានក្រាប (c) តាងឱ្យចម្លើយ។

ចូរសង់ក្រាប (c) ។

៦.នៅតំបន់មួយមានប្រជាជនចំនួន n នាក់។ ថ្ងៃមួយ មានអ្នកជម្ងឺមកពីតំបន់ផ្សេងម្នាក់បានចម្លងជម្ងឺម៉្យាងទៅប្រជាជនក្នុងតំបន់នោះ។គេដឹងថា ដោយសារផ្ទុះនៃជម្ងឺរាតត្បាតនេះ អត្រាថយចុះនៃចំនួនប្រជាជនដែលមានសុភាពល្អ ពោលគឺប្រជាជនមិនឆ្លងជម្ងឺនេះ សមាមាត្រទៅនឹងចំនួនប្រជាជនដែលឆ្លងជម្ងឺ។

តាង $X(t)$ ជាចំនួនអ្នកដែលមិនឆ្លងជម្ងឺនៅខណៈពេល t ហើយ r ដែលជាចំនួនថេរវិជ្ជមានតាងឱ្យមេគុណសមាមាត្រនៃជម្ងឺឆ្លង ពោលគឺរង្វាស់កម្រិតនៃជម្ងឺរាតត្បាតពីមនុស្សម្នាក់ទៅមនុស្សម្នាក់ទៀត។

ក.ចូរបកស្រាយថា អត្រាបម្រែបម្រួលនៃចំនួនប្រជាជនមានសុខភាពល្អ ឱ្យដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dx}{dt}=-r\left[n+1-x(t)\right]$ ។ចូរសង់ក្រាបនៃ $x(t)$ ។

ខ.បើអត្រាបម្រែបម្រួលនៃចំនួនប្រជាជនមានសុខភាពល្អ ឱ្យដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dx}{dt}=-rx\left[n+1-x(t)\right]$ ចូររកចម្លើយនៃ $x(t)$ ។តើពេលណា ដែលមានជម្ងឺឆ្លងនេះមានការរីករាលដាលក្នុងកម្រិតខ្ពស់បំផុត ?

៧.ភាពល្អិតដែលកំពុងធ្វើចលនាត្រង់ជាមួយនឹងល្បឿន $v(t)$ បានរងនូវកម្លាំងមួយដែលធ្វើឱ្យល្បឿននៃភាពល្អិតមានការថយចុះជាមួយនឹងអត្រា(សំទុះយឺត) $kv^2 m/s^2$ ដែល k ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន។

ក.សរសេរសមីការសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងឱ្យបម្រែបម្រួលល្បឿននៃភាពល្អិតនេះ។

ខ.ដោយដឹងថាល្បឿនដើម $v_0 = 2m/s$ ចូរបង្ហាញថាល្បឿននៅខណៈពេល t កំណត់ដោយ $v(t)=\frac{2}{1+2kt}$ ។

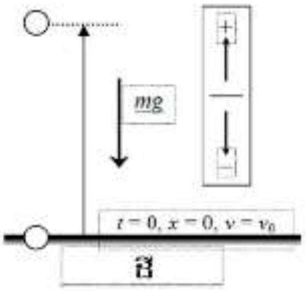
គ.បើ $4s$ ក្រោយមក ភាពល្អិតនឹងឈប់ ចូរសង់ក្រាបនៃល្បឿន $v(t)$ ។

៨.យើងទម្លាក់ថ្មមួយដុំដែលមានម៉ាស m ពីចំណុច 0។ប្រសិនបើល្បឿន v របស់ដុំថ្មនោះស្មើ 0 នៅត្រង់ខណៈពេល 0 (មានន័យថា $v=0$ នៅពេល $t=0$)សំទុះ a ដែលនៃចលនាថ្មនោះជាចំនួនថេរហើយ $a=g$ ដែល g គឺជា សំទុះទំនាញផែនដី(gravitational acceleration)ហើយ $g=9.8m/s^2$ នៅជិតផ្ទៃផែនដី។(ទិសដៅចុះក្រោមត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជាទិសដៅវិជ្ជមាន)

ក.ដោយមិនគិតកម្លាំងទប់ខ្យល់ ចូររកទីតាំង x របស់ដុំថ្មនៅខណៈពេល t (ឧបមាថា $x=0$ ចំពោះ $t=0$)

ខ.តើដុំថ្មមានទីតាំងនៅត្រង់ណាក្នុងរយៈពេល 4 វិនាទី ?

៩.បាល់មួយត្រូវបានគេបោះតាមទិសដៅឈរត្រង់ឡើងលើចេញពីដីដែលមានល្បឿនដើម v_0 ។ដោយមិនគិតកម្លាំងទប់ខ្យល់ ចូរឆ្លើយសំណួរខាងក្រោមៈ



(ដោយជ្រើសរើសទិសដៅឈរត្រង់ឡើងលើជាទិសដៅវិជ្ជមាន)

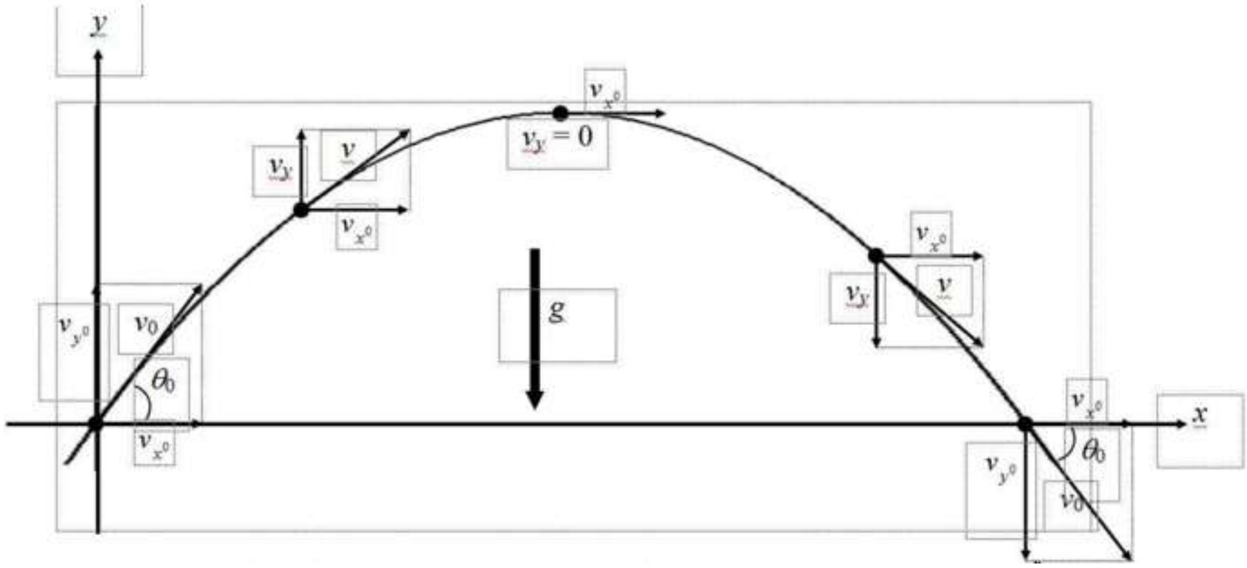
ក.ចូររកកម្ពស់ $x(t)$ របស់បាល់នៅខណៈពេល t ។

ខ.តើបាល់មានកម្ពស់ប៉ុន្មានប្រសិនបើល្បឿនដើមស្មើ $49m/s$?

(ប្រើតម្លៃ $g=9.8m/s^2$)

គ.នៅក្នុងសំណួរ ខ តើរយៈពេលសរុបស្មើប៉ុន្មាននៅពេលដែលស្ថិតនៅក្នុងខ្យល់ និងធ្លាក់មកដីវិញ ?

១០.បាល់មួយត្រូវបានគេចោលទៅក្នុងខ្យល់ដោយល្បឿនដើមមួយ បានធ្វើចលនាក្នុងទិសដៅជាខ្សែកោង។ បើយើងមិនគិតពីកម្លាំងទប់ខ្យល់ ហើយសន្មតថាមានសំទុះទំនាញផែនដី(មានទិសដៅត្រង់មកក្រោម)ដែលមានអំពើទៅលើបាល់នោះហើយយើងអាចវិភាគបានយ៉ាងងាយស្រួល។ ឧបមាថា ទិសដៅ y ត្រង់ឡើងលើ និងវិជ្ជមានហើយការបោះបាល់នេះមានល្បឿនដើម v_0 ដែលគន្លងនៃចលនាបង្កើតបានមុំ θ_0 ពីចំណុច $(0,0)$ ។ ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $a=a(t)$ និង $v=v(t)$ ដែលអាចបំបែកទៅជាវ៉ិចទ័រដែលមានកូអរដោនេជា a_x, a_y និង v_x, v_y ។ ពេលដែលយើងមិនគិតអំពើកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ ហើយយើងសន្មតថា សម្ទុះទំនាញផែនដី g មានអំពើទៅលើបាល់ យើងបាន $a_x=0$ និង $a_x=-g$ ។ដូច្នេះ វត្ថុដែលបានចោលទៅមុខបង្កើតបានមុំ θ_0 បង្ហាញដោយ ចលនាឯកសណ្ឋានដេកមួយ ហើយមានទំហំទម្លាក់សេរីបញ្ឈរមួយ។

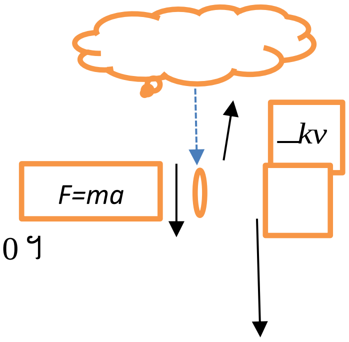


ក.ចូរសេរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែល $a_x = 0$ និង $a_x = -g$ រួចរកកូអរដោនេល្បឿន v_x និង v_y ព្រមទាំងរកកូអរដោនេ x និង y នៅខណៈពេល t។

ខ.តាមលទ្ធផលដែលគេទទួលបាននៅសំណួរទី1 តើប៉ុន្មានដឺក្រេដែលយើងគួរចោលបាល់ ដើម្បីឱ្យបានចម្ងាយឆ្ងាយបំផុត?

គ.សន្មតថាសម្ទុះទំនាញផែនដី $g = 9.8m/s^2$ ។រកតម្លៃធំបំផុតនៃ x ពេលដែល $v_0 = 49m/s$ និង $\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ និង 75° ។

១១.នៅតំណក់ទឹកភ្លៀងធ្លាក់ចុះមក មានកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ទៅលើតំណក់ទឹកភ្លៀងនោះ(មិនដូច្នេះមនុស្សរាប់លាននាក់និងអាចស្លាប់ដោយតំណក់ទឹកភ្លៀងនៅរៀងរាល់រដូវវស្សា)។



ឧបមាថាកម្លាំងកកិតមានសមាមាត្រទៅនិងល្បឿនដំណាលនៃតំណក់ទឹកភ្លៀងដែលមានចំនួនថេរសមាមាត្រ $k > 0$ និងថាមិនមានកម្លាំងកកិត ដទៃ ដែលអំពើលើតំណក់ទឹកភ្លៀងធ្លាក់ចុះត្រង់ទៅលើផែនដី។
នៅពេលតំណក់ទឹកភ្លៀងដែលមានម៉ាស m ធ្លាក់ចុះដោយល្បឿនដើម $v_0 = 0$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា ល្បឿន v របស់វានៅខណៈពេល t គឺ $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ ។
តាមលទ្ធផលនេះតើគេអាចសន្និដ្ឋានបានយ៉ាងណាចំពោះល្បឿន v ?

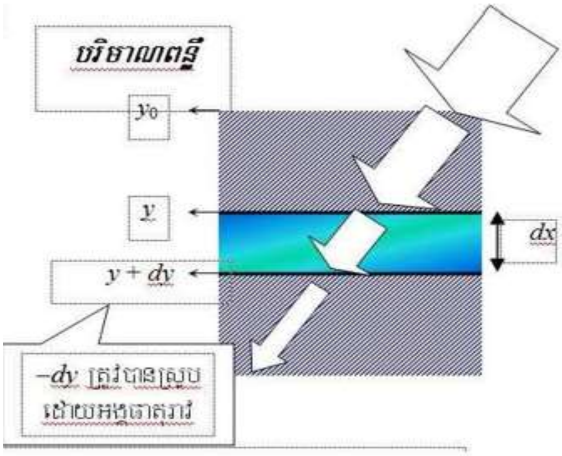
ខ.សង់ក្រាប v នៃអនុគមន៍នៃ t ។

១២.វត្ថុមួយមានម៉ាស m ត្រូវបានថ្ពកដោយរ៉ឺស័រដែលមានថេរកម្រាញរ៉ឺស័រ $k > 0$ ។

ក.ចូរកំណត់បម្លាស់ទី $x(t)$ នៅខណៈពេល t (ឧបមាថាមិនគិតកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ទេ)។

ខ.សង់ក្រាប $x(t)$ ។

១៣.ល្បឿននៃការបំបែកសារធាតុនៃវិទ្យុសកម្មមួយមានសមាមាត្រដោយផ្ទាល់ចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលមាននៅសល់។នៅពេលមានណ្វៃយ៉ូវិទ្យុសកម្ម N_0 នោខណៈពេល $t = 0$ ចូររកសមីការបញ្ជាក់ពីចំនួនណ្វៃយ៉ូវិទ្យុសកម្ម N ដែលមាន វត្តមាននៅខណៈពេល t ។



១៤.ឧបមាថាបរិមាណពន្លឺដែលស្រូបដោយអង្គធាតុរាវគឺសមាមាត្រទៅនឹងបរិមាណពន្លឺដែលទៅប៉ះនឹងផ្ទៃប៉ះនៃអង្គធាតុ រាវ និងទៅនឹងជម្រៅនៃអង្គធាតុរាវនោះ។ នៅពេលដែលបរិមាណពន្លឺ ចូលទៅក្នុងអង្គធាតុរាវមួយ។ ចូររកបរិមាណពន្លឺដែលនៅសល់ត្រង់ជម្រៅ x ។

ឯកសារយោង

១. សម្តេច ជួន ណាត វចនានុក្រមខ្មែរ ភាគ១ ភាគ២ បោះពុម្ពលើកទី៥ ការផ្សាយរបស់ពុទ្ធសាសនាបណ្ឌិត្យ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ ១៩៦៧។
២. សៀវភៅវិធីសាស្ត្របង្រៀនគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ឆ្នាំ២០១៩។
៣. សៀវភៅសិក្សាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់។
៤. សៀវភៅសិក្សាគណិតវិទ្យា ១២ភាគ បោះពុម្ពដោយគម្រោង STEPSAM I, ឆ្នាំ ២០០៣។